Analyse pour l'Économie 1

25 novembre 2020

CC 2 : 3 decembre (jeudi !)

Programme : email !

Suites de fonctions - continuation

Rappel : Déf cv. uniforme $f_n \to f$; $f_n : A \to B$

$$\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n > N\ \underbrace{\forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}_{\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon}$$

En fait : caractérisation alternative

$$\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n > N : \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$$

càd : $\boxed{\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0}$

Déf : $\|g\|_\infty = \sup\limits_{x \in A} |g(x)|$ $\qquad g : A \to B$

Rappel : s'il $\exists (x_n)$ tq $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$
alors f_n ne tend pas uniformément vers f.

Preuve : $\underbrace{|f_n(x_n) - f(x_n)|}_{\not\to 0} \leq \|f_n - f\|_\infty$ alors $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$ $\square$

Exemple : $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

cv. simple : $\underbrace{\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x}{x+n}}_{\text{"}x\text{ constante"}} = 0$, $\underline{f(x) = 0 \text{ la limite simple}}$

cv. uniforme ?

<u>Stratégie 1</u> : $\|f_n - f\|_\infty = \|\frac{x}{x+n}\|_\infty$ | $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\left(\frac{x}{x+n}\right)' = \frac{(x+n)\cdot 1 - x\cdot 1}{(x+n)^2} = \frac{n}{(x+n)^2} > 0$$

donc

x :	0		1
$f_n(x)$:	0	$\nearrow$	$\frac{1}{1+n}$

$$\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{1+n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Conclusion : Convergence uniforme !

<u>Exemple</u> : $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$, $f_n : [0,\infty[\to \mathbb{R}$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $\underline{f(x) = 0}$ limite simple

<u>Stratégie 1</u> : $\|f_n - f\|_\infty = \|\frac{x}{x+n}\|_\infty$

$$\left(\frac{x}{x+n}\right)' = \frac{n}{(x+n)^2} > 0$$

x :	0		∞
$f_n(x)$:	0	$\nearrow$	1

"$f_n(\infty)$"

$\boxed{n \text{ constante}}$ si $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+n}$$

$$= \underline{\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x}} = 1$$

$\uparrow$

u_n

qui par hasard est constante

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{n}{x}} = 1, \quad \frac{n}{x} \to 0$$

$$\|f_n - f\|_\infty = \|f_n - 0\|_\infty$$

$$= \|f_n\|_\infty = 1 \not\to 0$$

Conclusion : pas de cv. uniforme !

<u>Stratégie 2</u> $f_n(x) = \frac{x}{\underbrace{x+n}}$

<u>Heuristique</u> : Si dénominateur est une somme $a+b$ on essaie de trouver x_n tq "a" = "b"

$\boxed{x_n = n}$ $\quad f_n(x_n) = \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}$

$f(x_n) = 0$ (limite simple)

$$\| f_n - f \|_\infty \geq | f_n(x_n) - f(x_n) | = \frac{1}{2} \not\to 0$$

Conclusion : f_n ne cv. pas uniformement vers f.

(Strat 2 seulement si f_n ne cv. pas unif.)

$$\left(\|g\|_\infty \geq |g(x)| \quad \text{si } x \in A,\ g : A \to B \right)$$

Si la suite est compliquée on prefère d'utiliser un majorant : $\quad (f_n : A \to B,\ A, B \in \mathbb{R},\ B \text{ fermé},\ f \text{ lim. simple})$

Stratégie 3 : S'il existe une suite numérique u_n tq.

$|f_n(x) - f(x)| \leq u_n \quad \forall x \in A$ et $u_n \to 0$

alors $\|f_n - f\|_\infty \leq u_n \to 0$

$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \to 0$ alors f_n cv. unif.

Exemple : $\frac{1}{x + \frac{n}{x}} = f_n(x)$, $\quad f_n : [1, \infty[\to \mathbb{R}$

$\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$, lim. simple $f(x) = 0$

[Si on essaie de trouver x_n : $\quad x = \frac{n}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt{n}$

$x_n = \sqrt{n}$: $\quad f_n(x_n) = \frac{1}{\sqrt{n} + \frac{n}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$

$$|f_n(x_n) - \underbrace{f(x_n)}_{0}| = \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$$

on ne peut rien conclure !]

Stratégie 3 :

- $\dfrac{1}{x+\frac{n}{x}} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ si $x \geq \sqrt{n}$

- $\dfrac{1}{x+\frac{n}{x}} \leq \dfrac{1}{\frac{n}{x}} = \dfrac{x}{n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ si $x \leq \sqrt{n}$

Donc $\dfrac{1}{x+\frac{n}{x}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall x \in [1,\infty[$

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x+\frac{n}{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est une maj. cv. vers 0 pour $\|f_n - f\|_\infty$

Conclusion : f_n cv. unif. vers f

Stratégie 1 : $\boxed{\dfrac{1}{x+\frac{n}{x}} = \dfrac{x}{x^2+n}}$, $f_n : [1,\infty[\to \mathbb{R}$

$$f_n'(x) = \frac{(x^2+n)\cdot 1 - x\cdot 2x}{(x^2+n)^2} = \frac{n-x^2}{(x^2+n)^2} \overset{?}{=} 0$$

ssi $n - x^2 = 0$
$\iff x^2 = n$
$\iff x = \sqrt{n}$

x	1		$\sqrt{n}$		∞
$f_n(x)$	$\frac{1}{1+n}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2\sqrt{n}}$	$\searrow$	0

$f_n(\sqrt{n}) = \dfrac{\sqrt{n}}{n+n} = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

$\boxed{\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+n} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2} = 0}$

"$f_n(\infty)$"

$$\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$$

Conclusion : $f_n \to f$ unif.

Pourquoi étudier la cv. uniforme ?

Respecte : bornée / continue / limite / intégrale / derivée

Théorème : Soient $f_n : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$, B fermé

f est limite uniforme de f_n

Si f_n sont bornées (pour tout n)

alors f est bornée.

Preuve :
$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \\
&\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \\
&\leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty
\end{aligned}
$$

existe parce que $\|f-f_n\|_\infty \to 0$ | existe parce que f_n est bornée

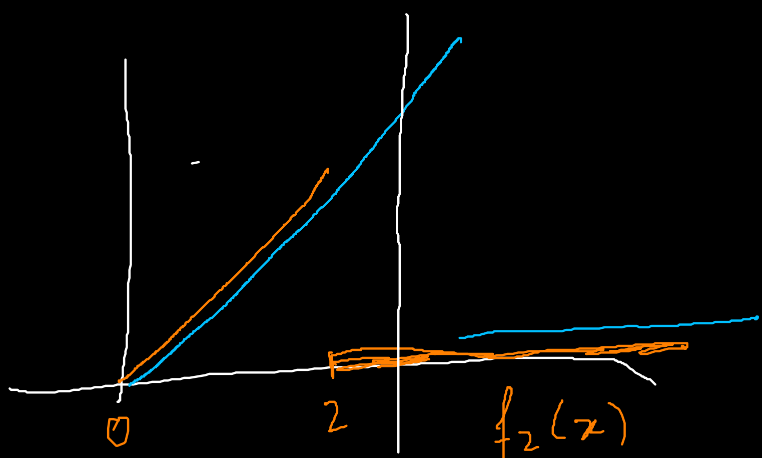
$\square$

Exemple : $f_n(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$ | $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x$

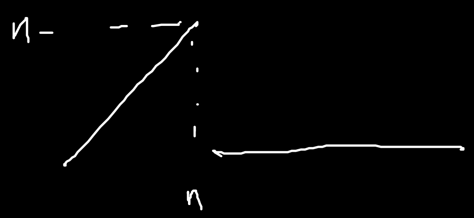
si $x \leq n$, $f_n(x) = x$

alors $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x = x$



limite simple est $f(x) = x$

$\|f_n\|_\infty = n$; f n'est pas bornée !



Conclusion: pas de cr. uniforme

<u>Thme</u> : Soient $f_n : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$, B fermé
f est la limite <u>uniforme</u>

Si f_n sont continue dans $a \in A$, (a point ds. A)
alors f continue dans $a \in A$.

<u>Preuve</u> : On sait $\|f - f_n\|_\infty \to 0$

choisir δ tq $|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (f_n continue)

Soit $\varepsilon > 0$, choisir n tq: $\|f - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$,

$|x-a|<\delta$:
$$|f(x) - f(a)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)|$$
$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

---

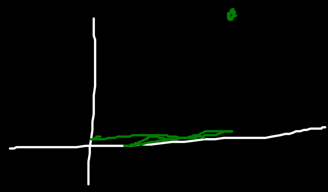
g continue ds. a si
$\forall \varepsilon\ \exists \delta$: si $|x-a| < \delta$ on a $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$

g continue sur A si g continue ds chaque $a \in A$

<u>Exemple</u> : $f_n(x) = x^n$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$ limite simple

f_n continues (polynomes !)
f n'est pas continue (saut)



Conclusion : pas de cv. uniforme.

(si f_n, f continues, on peut rien conclure !)
càd : on ne peut pas conclure cv. uniforme

Thme : Soient $f_n : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$, B fermé
f limite uniforme.
a point d'adhérence de A (exemple : $A =]0,1[$ $a=0$, $a=1$
$A = [0,\infty[$ $a = \infty$)

On suppose $\lim_{x \to a} f_n(x) = u_n$ suite numérique réelle

et $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ existe.

Alors $\lim_{x \to a} f(x) = l$ ✓

càd : $\lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$

Preuve : $g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } x \in A \\ u_n & \text{si } x = a \end{cases}$ | $g_n : A \cup \{a\} \to B$

g_n continue ds. a

limite simple : $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$

$$\|g_n - g\|_\infty \leq \max(\underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\to 0}, \underbrace{|u_n - l|}_{\to 0}) \longrightarrow 0$$

si $x \neq a$: $|g_n(x) - g(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$

si $x = a$ $|g_n(a) - g(a)| = |u_n - \ell|$

Conclusion : $g_n \to g$ unif, g_n continue ds a

donc, par le thme précédent : g continue ds a

---

c.à.d : $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \ell}$$

□

<u>Thme</u> : $f_n : [a,b] \to B$, $B \subset \mathbb{R}$, fermé

f_n continue ; f limite uniforme (donc continue)

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \xrightarrow{n \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

---

càd : $\lim \int = \int \lim$

<u>Preuve</u> : $\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| =$

$= \left| \int_a^b (f(x) - f_n(x))\,dx \right|$

il n'y a plus de x !

$\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \leq \int_a^b \|f - f_n\|_\infty\,dx$

$$= \underbrace{\|f - f_n\|_\infty}_{\to 0} \cdot \overbrace{(b-a)}^{\text{constante}}$$

longueur d'intervalle

cv. unif.

majorant convergent !

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \square$$

Exemple: $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x^2}$, $f_n :]0,\infty[\to \mathbb{R}$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $f(x) = 0$ limite simple

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+n^2x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\frac{1}{n}\,dy = \frac{1}{n}\Big[\arctan y\Big]_0^\infty$$

$y = nx$

$dy = n\,dx$

$$= \frac{1}{n}\underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)}_{\text{const.}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\int f(x)\,dx = 0$, (mais la cv. n'est pas uniforme) (*)

Conclusion seulement dans une direction

Pourquoi pas uniforme ? $x_n = \frac{1}{n}$ $\quad (1 = n^2x^2)$

$$\Rightarrow f_n(x_n) - f(x_n) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \not\to 0$$

(*) Si $f_n \to f$ uniforme $\Rightarrow \int f_n \to \int f$

mais si $\int f_n \to \int f \overset{???}{\Rightarrow} f_n \to f$ unif

NON !

parfois oui, parfois non

<u>Thme</u> : Soient $f_n : [a,b] \to B$, $B \subset \mathbb{R}$ fermé

f_n $\mathcal{C}^1$ et $f_n' \to g$ uniformement sur $[a,b]$

et $f_n(a)$ converge (comme suite numérique)

Alors $\exists f : f_n \to f$ et $f' = g$. $\quad (f_n' \to f')$

Preuve $\quad f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt \xrightarrow[\text{thme précédent}]{n\to\infty} f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$

$\uparrow$ cv. unif

Si on pose $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$

on a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ et $f'(x) = g(x)$ $\square$

Chapitre : Séries de fonctions

Soient $f_n : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$, B fermé

La série $\sum f_k$ est la suite de somme partielles $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) = S_n(x)$

Exemple : $\quad f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n$

série géom : $\quad \sum_{k=0}^{n} x^k \underset{x\neq 1}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-x}, \quad x<1$

si $x=1$: $\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

$\sum f_k$ ne converge pas simplement.

Convergence uniforme : $\|S_n - S\|_\infty \to 0$

si S est la limite simple de $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$

$$\|S_n - S\|_\infty = \left\| \sum_{k=0}^{n} f_k(x) - \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right\|_\infty = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right\|_\infty$$

<u>Convergence absolue</u> : $\sum |f_n(x)|$ converge simplement

alors $\sum f_n(x)$ converge simplement
(voir séries numériques)

<u>Convergence simple</u> : $|s_n(x) - s(x)| \to 0$
<u>Convergence uniforme</u> : $\|s_n(x) - s(x)\|_\infty \to 0$
<u>Convergence absolue</u> : $\sum |f_k(x)|$ converge
<u>Convergence normale</u> : $\sum \|f_k(x)\|_\infty$ converge

$|\cdot|$ par $\|\cdot\|_\infty$

<u>Thme</u> :

cv. normale ⇙ ⇘ cv. uniforme ⇙ cv. simple (suites de fonctions)

cv. absolue ⇘ cv. simple (voir séries numériques)

(ET $\sum \|f_k(x)\|_\infty$ est une série numérique)

<u>Preuve</u> : $\boxed{\text{cv. normale} \Rightarrow \text{cv. absolue}}$

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ a le majorant convergent $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$

$\boxed{\text{cv. normale} \Rightarrow \text{cv. uniforme}}$

$$\|s_n - s\|_\infty = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_n(x) \right\|_\infty \underset{\text{inég. triang.}}{\leq} \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_n(x)\|_\infty \xrightarrow[\text{cv. normale}]{n\to\infty} 0$$

□

Exemple: $f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{n}\,(x+n)}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$\sum f_n(x)$ cv. ?, cv. unif ?

$$\| f_n(x) \|_\infty = \left\| \frac{x}{\sqrt{n}\,(x+n)} \right\|_\infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{x}{x+n} = \left(1 - \frac{n}{x+n}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Si $x \nearrow \Rightarrow x+n \nearrow \Rightarrow \dfrac{1}{x+n} \searrow \Rightarrow \dfrac{n}{x+n} \searrow \Rightarrow -\dfrac{n}{x+n} \nearrow$

$\Rightarrow 1 - \dfrac{n}{x+n} \nearrow \Rightarrow \left(1 - \dfrac{n}{x+n}\right) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n}} \nearrow$

f_n croissante

x	0		1
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{n}\,(1+n)}$

$$\| f_n \|_\infty = \frac{1}{\sqrt{n}\,(1+n)}$$

Il reste à étudier la série numérique $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}\,(1+n)}}_{>0}$

on utilise le thm pour les équivalents !

$$\frac{1}{\sqrt{n}\,(1+n)} \overset{(n \to \infty)}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n} \cdot n} = \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{et} \quad \frac{3}{2} > 1$$

$\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge comme série de Riemann avec exposant > 1

Conclusion: $\sum \| f_n \|_\infty$ converge

$\Rightarrow \sum f_n$ cv. normale, donc absolue, uniforme, simple

En particulier : f_n continue donc

$\sum f_n$ continue aussi