Rappel: (Continuation : Séries de fonctions)

Convergence normale:

Soient $f_k : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$, B fermé

On dit que $\sum f_k$ converge normalement

si $\sum \| f_k \|_\infty$ converge.

Thme: Soient $f_n : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$, B fermé

$\sum f_n$ converge normalement

$\Leftrightarrow$ il existe (u_n) suite numérique tq $|f_n(x)| \le u_n$ $\forall x \in A$

et $\sum u_n$ converge

Preuve: $(\Rightarrow)$ On choisit $u_n = \| f_n \|_\infty$.

$(\Leftarrow)$ Comme $|f_n(x)| \le u_n$, $\| f_n \|_\infty$ existe et

$\sum \| f_n \|_\infty$ est majorée par $\sum u_n$ qui converge

Donc, par l'existence d'un majorant convergent

la série $\sum \| f_n \|_\infty$ converge aussi. $\square$

Exemple: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-x/n}}{n^2}$ sur $[0, \infty[$

donc $e^{-x/n} \le 1$ $\Rightarrow$ $f_n(x) = \dfrac{e^{-x/n}}{n^2} \le \dfrac{1}{n^2}$

$u_n = \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec exposante > 1)

Donc, on a convergence normale

donc cv. absolue, cv. uniforme, cv. simple.

(En fait, $u_n = \| f_n \|_\infty$.)

Thme : Soient $f_n : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$, B fermé

- S'il existe (x_n) suite numérique tq $f_n(x_n) \not\to 0$
  alors $\sum f_n$ ne converge ni uniformement
  ni normalement.

- S'il existe (x_n) suite numérique tq
  $\sum f_n(x_n)$ ne converge pas (comme série numérique)
  alors $\sum f_n$ ne cv. pas normalement.

Preuve : On montre le contrepositif :

$[u_n = S_n - S_{n-1}$ avec $S_n \to S$ et $S_{n-1} \to S$ donc $u_n \to 0]$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Si $\sum f_n$ converge uniformement

$$f_n(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} f_n(x)}_{\downarrow \text{unif} \; S(x)} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} f_n(x)}_{\downarrow \text{unif} \; S(x)} \quad \Big\} \; (*) \to 0 \text{ unif.}$$

Alors, $\|f_n\|_\infty \to 0 \Rightarrow f_n(x_n) \to 0$

(*) Si $a_n(x) \to a(x)$ unif et $b_n(x) \to b(x)$ unif
alors $\|a_n - a\|_\infty \to 0$ et $\|b_n - b\|_\infty \to 0$
alors $\|(a_n + b_n) - (a+b)\|_\infty \underset{\substack{\uparrow \\ \text{inég. triangulaire}}}{\leq} \|a_n - a\|_\infty + \|b_n - b\|_\infty \to 0$

- Si f_n converge normalement,
  $\sum \|f_n\|_\infty$ converge, donc $|f_n(x_n)| \leq \|f_n\|_\infty$

  Donc $\sum |f_n(x_n)|$ converge par majoration,
  donc $\sum f_n(x_n)$ converge (absolue et donc simple) □

Exemple : $f_n(x) = \frac{x^3}{n^3 + x^3}$ sur $[0, \infty[$, $n \geq 1$

$x_n = n$ (heuristique : cherche $n^3 = x^3$)

$f_n(n) = \frac{n^3}{n^3 + n^3} = \frac{1}{2} \not\to 0$

Donc $\sum f_n(x)$ cv. ni uniformement, ni normalement

cv. simple ? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{n^3+x^3}$; $\frac{x^3}{n^3+x^3} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{x^3}{n^3}$

et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{n^3} = x^3 \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}}$

converge (série de Riemann à l'exposante > 1)

(cv. absolue ? oui, cv. simple d'une série positive)

Exemple : $f_n(x) = \frac{x^2}{n^3+x^3}$, sur $[0, \infty[$, $n \geq 1$

$\sum f_n$ cv. ?

cv. simple / absolue : $\frac{x^2}{n^3+x^3} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{x^2}{n^3}$ et $\sum \frac{x^2}{n^3}$

converge par Riemann

$x_n = n$, $f_n(x_n) = \frac{n^2}{n^3+n^3} = \frac{1}{2n} \longrightarrow 0$

et $\sum \frac{1}{2n}$ diverge (série harmonique)

$\Rightarrow \|f_n\|_\infty \geq \frac{1}{2n}$, $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge

pas de cv. normale

Alternative pour cv. normale :

$$\left(\frac{x^2}{n^3+x^3}\right)' = \frac{(n^3+x^3)\cdot 2x - x^2\cdot 3x^2}{(n^3+x^3)^2} = \frac{2xn^3-x^4}{(n^3+x^3)^2}$$

zéro si $2xn^3 - x^4 = 0 \Leftrightarrow x=0$ ou $2n^3 = x^3$

$x = \sqrt[3]{2}\, n$

x	0	$\sqrt[3]{2}\, n$	∞
$f_n(x)$	0	$\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\cdot\frac{1}{n}$	0

$\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = 0$ (*)

$$f_n(\sqrt[3]{2}\, n) = \frac{(\sqrt[3]{2})^2 n^2}{n^3+2n^3} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\cdot\frac{1}{n}$$

$$\|f_n\|_\infty = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\cdot\frac{1}{n}$$

$$\sum \|f_n\|_\infty = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\sum\frac{1}{n}$$ diverge ! (série harmonique)

donc pas de cv. normale

((*) $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{n^3+x^3} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$

$$\frac{x^2}{n^3+x^3} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$$)

Cv. uniforme ??

$$\sum_{k=n+1}^{2n} f_k(n) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} f_{2n}(n) = n\cdot f_{2n}(n) = n\cdot\frac{n^2}{(2n)^3+n^3} = \frac{1}{9}$$

$$f_{k+1}(x) = \frac{x^2}{(k+1)^3+x^3} \leq \frac{x^2}{k^3+x^3} = f_k(x),$$ f_k decroissante

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\right\|_\infty \geq \frac{1}{9} \not\to 0,$$ donc pas de cv. uniforme

Exemple: $\sum f_n$, $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^3+x^3}$, sur $[0,a]$, $a>0$

Cv. normale :

x	0		a
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$f_n(a) > 0$

valeur critique et $x = \sqrt[3]{2}\cdot n > a$ si n est grand ← const.

Donc, $\|f_n\|_\infty = f_n(a)$ si n suffisament grand ($n > a/\sqrt[3]{2}$)

Mais $\sum f_n(a)$ converge (cv. simple pour $x=a$

$\dfrac{a^2}{n^3+a^3} \sim \dfrac{a^2}{n^3}$, Riemann)

$\sum \|f_n\|_\infty$ converge, alors convergence normale (et donc cv. unif, abs., simple)

Thme : Soient $f_k : A \to B$, B fermé, $\sum f_k$ cv. unif.

Si f_k continue, alors $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ est continue.

Preuve: f_k continue $\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} f_k$ continue (somme finie!)

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k$ continue càd $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ continue. $\square$

↑ thme série de fcts. cv. unif.

Thme: Soient $f_k : A \to B$, B fermé, $\sum f_k$ cv. unif.

Si f_k bornée, alors $\sum f_k$ bornée.

<u>Remarque</u> : La somme de deux fonctions bornée est bornée.

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

(donc, une somme finie est bornée par recurrence)

Preuve du thme :

$$f_k \text{ bornée} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} f_k \text{ bornée} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k \text{ bornée}$$

thme suites de fcts. cv. unif.

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f_k \text{ bornée.}$$

□

<u>Thme</u> : Soient $f_k : A \to B$, B fermé, $\sum f_k$ cv. unif et soit a un point d'adhérence de A

On suppose que $\lim_{x\to a} f_n(x) = u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S$

alors $\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S$.

<u>Preuve</u> :

$$\lim_{x\to a} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} f_k(x)}_{S_n(x)} = \sum_{k=0}^{n} \lim_{x\to a} f_k(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k \qquad (*)$$

$S_n(x) \to S(x)$ unif.

Par le thme pour les suites de fonctions, on sait :

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} S_n(x) = \lim_{x\to a} S(x) \qquad (**)$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} S_n(x)$$

$(**) \lim_{x \to a} s(x) = s$ ✓ $\square$

Thme : Soient $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $\sum f_k$ cv. unif.

alors $$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx$$

Preuve : Soit $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$

$$\Rightarrow \int_a^b \lim_{n\to\infty} s_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx$$

thme suite de fcts. cv. uniforme

$$\Rightarrow \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx \quad \square.$$

Conclusion : Si la cv. est uniforme, on peut intégrer terme par terme.

Exemple : $f_n(x) = \dfrac{1}{n^4 + x^2}$, $n \geq 1$, sur $[0, \infty[$

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + x^2}\,dx = ?$$

$\left\| \frac{1}{n^4+x^2} \right\|_\infty = \frac{1}{n^4}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ cv. (Riemann à l'expos. > 1)

(parce que $f_n(x)$ est decroissante sur $[0,\infty[$

Donc, on a cv. normale, donc aussi cv. uniforme.

$\Rightarrow$ thme sur $[0,c]$ $\Bigg|$ $\displaystyle\int_0^c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+x^2}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^c \frac{1}{n^4+x^2}\,dx$

$$\int_0^c \frac{1}{n^4+x^2}\,dx = \int_0^c \frac{1}{n^4} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{n^4}}\,dx \qquad \frac{x^2}{n^4} = \left(\frac{x}{n^2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n^4}\left[\arctan\left(\frac{x}{n^2}\right) \cdot n^2\right]_{x=0}^{x=c} \qquad \Bigg|\; \begin{matrix} x=c \\ x=0 \end{matrix}$$

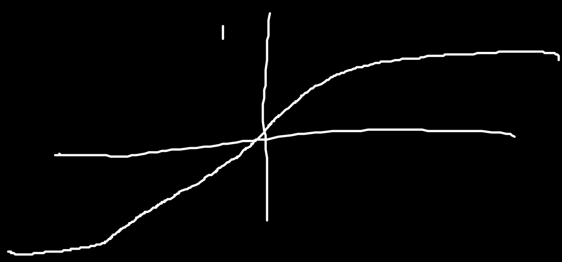
$$= \frac{1}{n^2} \cdot \arctan\left(\frac{c}{n^2}\right)$$

$$\lim_{c\to\infty} \int_0^c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+x^2}\,dx = \lim_{c\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^c \frac{1}{n^4+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{c\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \arctan\left(\frac{c}{n^2}\right)$$

$$\underset{\uparrow}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{c\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \arctan\left(\frac{c}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

on sait $\|\arctan x\|_\infty = \frac{\pi}{2}$ donc $\left\| \frac{1}{n^2} \cdot \arctan\left(\frac{c}{n^2}\right) \right\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$



$\sum \frac{1}{n^2}$ cv.

donc cv. normale, donc uniforme

Conclusion : $\displaystyle\int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{= \pi^2/6 \text{ admis}} = \pi^3/12$

Thme : Soit $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, C^1 et $\sum f_k'$ cv. unif

et $\sum f_k(a)$ cv.

$\Rightarrow \quad \sum f_k$ cv. et $(\sum f_k)' = \sum f_k'$

Preuve : $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_n(x)$, donc $s_n' \to g = \sum f_k'$ unif.

et s_n' continue (somme finie de fcts. continue)

Donc, par le thme pour les suite de fcts.

$\lim_{n\to\infty} s_n' = s'$ ou $s = \sum f_k$. □

Corollaire : Soit $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, C^∞

et $\sum f_k^{(r)}$ cv. unif. pour tout $r \geq 1$ ($f_k^{(r)}$ dérivée r-ème)

et $\sum f_k(a)$ cv.

alors $\sum f_k$ converge vers une fct. s

alors $s^{(r)} = \sum f_k^{(r)}$.

Preuve : On repete la derivation terme par terme r fois. □

Exemple : $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-x/n}}{n^2}$, $[0,\infty[\to \mathbb{R}$

Regarder sur $[0,c]$:

$$f_n^{(r)}(x) = \frac{1}{n^2} \cdot e^{-x/n} \cdot \left(-\frac{1}{n}\right)^r = (-1)^r \frac{e^{-x/n}}{n^{r+2}}$$ donc $f_n \in C^\infty$

$$\left\| \frac{e^{-x/n}}{n^2} \right\|_\infty = \frac{1}{n^2} \; ; \; \left\| (-1)^r \frac{e^{-x/n}}{n^{r+2}} \right\|_\infty = \frac{1}{n^{r+2}}$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^{r+2}}$ cv. (séries de Riemann à l'exposante > 1)

Donc, $\sum f_n^{(r)}$ cv. normalement, donc unif.
et $\sum f_n(0)$ cv. ($\sum f_n$ cv. normale)

Conclusion par le thme précédent :

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-x/n}}{n^2} \right)^{(r)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^r \frac{e^{-x/n}}{n^{r+2}}$$ sur $[0, c]$, $c > 0$ (fixe, mais arbitraire)

si quelque chose est vraie
pour $x \in [0, c]$, $c > 0$ arbitraire
alors elle est vraie pour $x \in [0, \infty[$
(choisir $c > x$)

Donc $$\boxed{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-x/n}}{n^2} \right)^{(r)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^r \frac{e^{-x/n}}{n^{r+2}}}$$
pour $x \in [0, \infty[$

<u>Quelques critères pour la cv. uniforme</u>

<u>Rappel : suite de Cauchy</u>
Une suite u_n converge $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon \, \exists N \, \forall n, m \geq N : |u_n - u_m| \leq \varepsilon$

<u>Critère de Cauchy uniforme</u> : $\forall \varepsilon \, \exists N \, \forall n, m \geq N : \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$
$\Leftrightarrow$ f_n cv. unif.

Critère de séries alternées uniforme

Soit $f_n : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$, B fermé

Si $f_n(x) \geq 0$, $f_n(x)$ décroissante comme suite

et $\lim f_n(x) = 0$ avec cv. unif.

alors $\sum (-1)^n f_n(x)$ cv. unif.

Preuve: Dans la preuve de critère de séries alternées on a trouvé pour les sommes partielles $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_k$

que $$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots \leq s_{2N+1} \leq s \leq s_{2N} \leq \cdots \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0$$

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f_k$$

$$\|s_n - s\|_\infty = \max\left(\|s_{2n} - s\|_\infty, \|s_{2n+1} - s\|_\infty\right)$$
$$\leq \max\left(\|s_{2n} - s_{2n+1}\|_\infty, \|s_{2n+1} - s_{2n}\|_\infty\right)$$
$$= \|s_{2n+1} - s_{2n}\|_\infty = \|-f_{2n+1}\|_\infty \longrightarrow 0$$

parce que $f_n \to 0$ unif.

$\Rightarrow \|s_n - s\|_\infty \to 0$ donc $s_n \to s$ cv. unif.

Règle d'Abel pour les séries numériques

Soient a_n, b_n suites réelles tq

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bornées et (b_n) est positive, décroissante et cv. vers 0,

alors $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \text{ converge.}$$

Règle d'Abel uniforme pour les séries de fonctions

Soient $a_n(x), b_n(x)$ fcts $A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$, B fermé

$\sum_{n=0}^{N} a_n(x)$ "bornée" c.à.d. $\|\sum_{n=0}^{N} a_n(x)\|_\infty$ bornée

et $b_n(x) \geq 0$, $(b_n(x))_n$ décroissante et $b_n(x) \to 0$
cv. uniforme

Alors $\sum a_n(x) b_n(x)$ cv. unif.

Typique : $a_n = (-1)^n \to$ critère de série alternée

$a_n = \sin(nx)$

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{1-q}$$

($q^{N+1} \to 0$)

si $|q| < 1$

preuve par recurrence $q \neq 1$

Question revision

2018/19 : Exercice 1 (Revision pour CC1)

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin t}{t}\,dt$$

$\frac{e^{-t}\sin t}{t}$ est continue sur $]0,\infty[$

équivalent à 0 : $\frac{e^{-t}\cdot\sin t}{t} \overset{0}{\sim} \frac{1\cdot t}{t} = 1$

$\int_0^c 1\,dt = c$ existe

à ∞ : $\left|\frac{e^{-t}\cdot\sin t}{t}\right| \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$ $t \geq 1$

$$\int_1^\infty e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_1^\infty = \underbrace{\lim_{t\to\infty}(-e^{-t})}_{0} + e^{-1} = e^{-1}$$

<u>Alors</u> : $\int_0^1 \frac{e^{-t}\cdot\sin t}{t}\,dt$ existe parce qu'une intégrale d'un équivalent à 0 existe.

$\int_1^\infty \frac{e^{-t}\cdot\sin t}{t}\,dt$ existe parce que c'est majoré par $\int_1^\infty e^{-t}\,dt$ qui existe.

Donc $\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin t}{t}\,dt$ existe.

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^3}\,dt$$

$\frac{\ln t}{1+t^3}$ continue sur $]0,1]$

$\ln(1+x)$
x petit

équivalent à 0 : $\frac{\ln t}{1+t^3} \underset{0}{\sim} \frac{\ln t}{1} = \ln t$

$$\int_0^1 \ln t \, dt = \left[t \cdot \ln t - t\right]_0^1 = -1 - \underbrace{\lim_{t \to 0} t \cdot \ln t}_{=0 \text{ par croiss. comp.}} = -1$$

$$(t \cdot \ln t)' = \underbrace{1 \cdot \ln t}_{} + t \cdot (\ln t)' = \ln t + t \cdot \frac{1}{t} = \ln t + 1$$

$$(t \cdot \ln t - t)' = (\ln t + 1) - 1 = \ln t$$

Donc $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^3} dt$ existe

$$\int_0^1 \ln t \, dt = \int_{-\infty}^0 u e^u du$$

$u = \ln t$ IPP

$t = e^u$

$dt = e^u du$