Chapitre 6 : Séries entières

Déf : Une série entière est une série de fonctions $\sum a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{R}$.

On la regarde comme fonction sur son domaine de convergence.

$=$ ensemble de valeurs de z tel que la série converge.

Déf : Le rayon de convergence d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est $R = \sup\{|z| : \sum a_n z^n \text{ converge}\}$

L'ensemble n'est pas vide parce que $\sum a_n \cdot 0^n = 0$ converge

$\Rightarrow R \geq 0$, R peut être ∞ si l'ensemble n'est pas borné.

Thme (Rayon de cv et domaine de cv)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et soit $R > 0$ son rayon de cv.

Alors

① $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $[-r, r]$ pour tout $r < R$

(aussi unif. et abs.)

② $\sum a_n z^n$ diverge sur $\{z : |z| > R\}$

Preuve :

① Soit $r < R$. Par déf de R, il existe z tq $\underbrace{\sum a_n z^n \text{ cv.}}$ et $r < |z|$.

$\Rightarrow |a_n z^n| \to 0 \Rightarrow |a_n z^n| \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow |a_n r^n| = \underbrace{|a_n z^n|} \cdot \left|\frac{r}{z}\right|^n$

$\leq C \cdot q^n \qquad q = \frac{r}{|z|} < 1$

Donc $\sum |a_n| \cdot r^n$ est majorée par la série géométrique convergente $\sum q^n \Rightarrow \sum |a_n| \cdot r^n$ cv.

Mais, si $z \in [-r, r]$

$\Rightarrow \sum |a_n| |z^n| \leq \sum |a_n| \cdot r^n$ cv.

$\|a_n \cdot z^n\|_\infty \leq |a_n| \cdot r^n$ cv. normale !

② Par définition de R, $\sum a_n z^n$ diverge si $|z| > R$.

$\square$

Remarque : On sait rien pour le moment si $|z| = R$.

<u>Formules pour le calcul de rayon de cv :</u>

Thme : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence.

① $\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ si la limite existe.

② $\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ — " —

(On utilise " $\frac{1}{0} = \infty$ ", " $\frac{1}{\infty} = 0$ ".)

(c-à-d si on trouve $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow R = \infty$

si $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \Rightarrow R = 0$)

<u>Preuve :</u> ① On veut appliquer le critère de Cauchy à $\sum a_n z^n$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z| = \frac{|z|}{R}$$

Donc, si $\frac{|z|}{R} < 1$, la série cv.

si $\frac{|z|}{R} > 1$, la série diverge

Donc, R est bien le rayon de cv.

2) On applique le critère de d'Alembert à $\sum a_n z^n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |z| = \frac{1}{R} \cdot |z|$$

Si $|z| < R$, la série cv. \
Si $|z| > R$, la série div $\Big\}$ R est le rayon de cv. $\square$

Thme (Propriétés de séries entières 1)

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière et $R > 0$ son rayon de cv.

On a

1) $\sum a_n z^n$ est continue sur $]-R, R[$

2) $\sum a_n z^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$

La dérivée est $\sum n a_n z^{n-1}$ avec le même rayon de convergence.

(3) Une primitive est $\sum a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ avec le même rayon de convergence.

(4) $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Preuve: (1) $a_n z^n$ est continue

Sur $[-r,r]$, $r<R$, on a cv. normale donc cv. uniforme, donc $\sum a_n z^n$ est continue sur $[-r,r]$, $\forall r<R$ donc elle est continue sur $]-R,R[$.

(2) Le rayon de convergence de $\sum n a_n z^{n-1}$:

si $|z|<R$, (R rayon de cv. de $\sum a_n z^n$)

alors
$$|n a_n z^{n-1}| = |a_n z^n| \cdot |n| \frac{1}{|z|}$$
$$\underset{\substack{\uparrow \\ q=\frac{|z|}{R}<1}}{\leq} q^n \cdot |n| \frac{1}{|z|}$$

mais $\sum n \cdot q^n$ converge $\left(\sqrt[n]{nq^n} \xrightarrow{n\to\infty} q<1\right)$

$\Rightarrow \sum n a_n z^{n-1}$ cv. si $|z|<R$

De manière analogue: diverge si $|z|>R$.

Conclusion: $\sum n a_n z^{n-1}$ cv. uniformément sur $[-r,r]$
$r<R$

donc par le thm sur les dérivées de séries
on a $\left(\sum a_n z^n\right)' = \sum n a_n z^{n-1}$ sur $[-r,r]$, $r<R$
donc sur $]-R,R[$

Si on repete cet argument, on trouve
$\sum a_n z^n$ est $\mathcal{C}^\infty$

3 Par 2 $\left(\sum a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}\right)' = \sum a_n z^n$
avec le même rayon de cv.

4 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

Par 2, on a $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n z^{n-k}$

donc $f^{(k)}(0) \underset{\uparrow}{=} k!\, a_k$

terme qui reste : $n-k=0$

$\Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ $\square$

Thme (Propriétés de séries entières 2)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_1 et R_2

① $\sum a_n z^n + \sum b_n z^n = \sum (a_n+b_n) z^n$

a rayon de convergence $R \geq \min(R_1, R_2)$

(si $R_1 \neq R_2$, $R = \min(R_1, R_2)$)

② $(\sum a_n z^n) \times (\sum b_n z^n)$

$= \sum (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) \cdot z^n$

rayon de cv. $R \geq \min(R_1, R_2)$

<u>Preuve:</u> ① Si $|z| < \min(R_1, R_2)$, la série cv. comme somme de deux séries convergentes

Comme $\sum a_n z^n = \sum (a_n+b_n) z^n + \sum (-b_n) z^n$

on a aussi $R_1 \geq \min(R, R_2)$

Donc, si $R_1 < R_2 \Rightarrow R_1 \geq R$ $\left.\begin{matrix} \\ \text{et } R \geq \min(R_1, R_2) = R_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow R = R_1 = \min(R_1, R_2)$

② si $|z| < \min(R_1, R_2)$, les deux séries convergent absolument, on a donc le droit de reordonner les termes.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_k z^k b_m z^m$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} z^{\overbrace{k+m}^{=n}} a_k \underbrace{b_m}_{n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad \square$$

<u>Exemple</u> : ⊙ $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

$a_n = 1$, $\quad \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$

⊙ $1-z$, $\quad R = \infty \quad$ (somme finie cv. toujours)

$a_2 = a_3 = \dots = 0$

⊙ $\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)}_{\text{série géom.}} \cdot (1-z) = \frac{1}{1-z} \cdot (1-z) = 1$, $R = \infty$

$(R \geq \min(1, \infty))$

<u>Lien avec developpement limité</u>

Rappel de la formule de Taylor-Lagrange

Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$, $z \in \mathbb{R}$

$$\boxed{f(z) = f(0) + f'(0)\cdot z + \frac{f''(0)}{2!}\cdot z^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot z^n + \underbrace{R_n(z)}_{\text{reste}}}$$

Il existe ξ entre 0 et z tq :

$$\boxed{R_n(z) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} z^{n+1}}$$

X1   X1

Si $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(z) \to 0$, alors $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$

Thme (Rayon de cv. par comparaison)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux series entières de rayons de convergence R_1 et R_2, $c \in \mathbb{R}^+$

① Si $|a_n| \leq c \cdot |b_n| \Rightarrow R_2 \leq R_1$

② Si $a_n \sim b_n \Rightarrow R_1 = R_2$

Preuve : ① $|a_n| \leq c\cdot |b_n|$

$\Rightarrow$ Si $\sum |b_n z^n|$ cv. $\Rightarrow \sum |a_n z^n| \leq c \cdot \sum |b_n z^n|$

$\Rightarrow R_1 \geq R_2$.

② $a_n \sim b_n \Rightarrow \exists\, c, c' : |a_n| \leq c|b_n|$ et $|b_n| \leq c'|a_n|$

$\Rightarrow R_1 \geq R_2$ et $R_1 \leq R_2 \Rightarrow R_1 = R_2$ $\square$

Exemple : $\sum \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\, z^n$; $\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \overset{\infty}{\sim} 1$

$\Rightarrow$ Il suffit de déterminer le rayon de convergence de $\sum z^n$ qui est $R = 1$.

Thme (Unicité de la série entière), $R > 0$

Soient $f(z) = \sum a_n z^n$ et $g(z) = \sum b_n z^n$ sur $]-R,R[$ et soit $f(z) = g(z)$ sur $]-R,R[\Rightarrow a_n = b_n$.

Preuve : Corollaire immédiat de la formule pour les coefficients

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = b_n . \quad \square$$

Developpement autour des points different de 0 :

Def : Une série entière autour de z_0 est une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, vu comme fonction sur son domaine de cv.

En choisissant la variable $w = z - z_0$, les resultats precedents pour $z_0 = 0$ restent vrais.

En particulier, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Developpements en séries entières de fcts usuelles:

① $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, $R = \infty$

② $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$

③ $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$

④ $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$

⑤ $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$

⑥ $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $R = 1$

⑦ $\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{z^n}{n}$, $R = 1$

⑧ $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$, $R=1$, si $\alpha \notin \mathbb{N}$

$R=\infty$, si $\alpha \in \mathbb{N}$

où $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$

Preuve de ①: e^z

calculer $f^{(n)}(0)$, coeffs de Taylor, vérifier que reste $\to 0$

$$(e^z)^{(n)} = e^z \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + R_n(z)$$

$$|R_n(z)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot z^{n+1} \right|$$

Constante

$$= \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} z^{n+1} \right| \leq \frac{e^{|z|}}{(n+1)!} z^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

exp est croissante

On constate que $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \checkmark$$

② $\to$ TD

③ – ⑤ marchent de manière analogue

⑥ On sait déjà que $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, si $|z|<1$

Par l'unicité, c'est la série entière de $\frac{1}{1-z}$

⑦ $\ln(1+z)$

$$(\ln(1+z))' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,$$

$R = 1$

$$\Rightarrow \ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + C$$

$C = f(0) = \ln(1+0) = 0$

$$= \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}}, \quad R = 1$$

(rayon de cv de primitive est le même)

---

⑧ $(1+z)^\alpha = \sum a_n z^n$

$$((1+z)^\alpha)^{(n)} = \alpha\cdot(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(1+z)^{\alpha-n}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} =: \binom{\alpha}{n}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}\right|$$

$$= \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| \overset{\infty}{\sim} \left|\frac{-n}{n}\right| = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Donc, rayon de convergence $\underline{R=1}$

sauf si $a_n = 0$ (division par 0), càd $\alpha \in \mathbb{N}$

Mais si $\alpha \in \mathbb{N}$, on a un polynôme, donc $R = \infty$.

Il reste à vérifier $R_n \to 0$ $\boxed{|z| < 1}$

$R_n(z) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot z^{n+1}$, ξ entre 0 et z

$R_n(z) = \boxed{\frac{\alpha \cdot \ldots \cdot (\alpha - n)}{(n+1)!}} (1+\xi)^{\alpha - n} \cdot z^{n+1}$ $0 < \xi < z$

$\leq \underbrace{\text{polynome ds. } n}_{\sim n^s} \cdot \underbrace{(1+\xi)^\alpha}_{\text{const}} \cdot \underbrace{z}_{\text{const}} \cdot \underbrace{\left(\frac{z}{1+\xi}\right)^n}_{q^n}$

avec $q < 1$

$\sum n^s q^n$, $q < 1$ converge

parce que $\sqrt[n]{n^s q^n} = (\sqrt[n]{n})^s q \to q < 1$

critère de Cauchy

$\Rightarrow n^s q^n \xrightarrow{n \to \infty} 0 \Rightarrow R_n \to 0$

Exemple:

Rayon de convergence de :

$$\sum \binom{2n}{n} z^n$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \cdot \frac{n!\,n!}{(2n)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{\cancel{(2n)!}} \frac{\cancel{n!}\,\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}\,(n+1)\cancel{n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n \cdot 2n}{n \cdot n}$$

$$= 4$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{4}}$$

FIN