Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
Jeudi 12 Janvier 2018

Analyse pour l'économie 1. Partie 1/2

Utiliser la copie N. 1 pour composer cette partie du sujet

- La durée de totale de l'epreuve (partie 1 + partie 2) est de 2 heures.

- Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé.

- La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice A. Séries de fonctions. On considère la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ de terme général

$$f_n(x) = \frac{2x}{n^2+x^2}, \text{avec } n \geq 1 \text{ et } x \in [0, +\infty[.$$

a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction note S (qu'on ne demande pas d'expliciter).

b) Soit $a > 0$, montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge normalement sur $[0, a]$.

c) Montrer que

$$\int_0^1 S(x)\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n^2+1) - \ln n^2.$$

d) Pour $n \geq 1$, donner la valeur de $\|f_n\|_\infty$ avec $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$. (Indication : on pourra étudier les variations de la fonction f_n).

e) Etudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ sur $[0, +\infty[$.

f) Etudier la continuité et la dérivabilité de S.

Exercice B. Séries entières.

1) Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière qui converge pour $z = i$ et diverge pour $z = 1 - 2i$. Que peut-on dire du rayon de convergence R de cette série.

2) Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} 3^n n^4 z^n, \;\; f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n.$$

Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
12 Janvier 2018

Analyse pour l'économie 1. Partie 2/2

Utiliser la copie N. 2 pour composer cette partie du sujet

- La durée de totale de l'epreuve (partie 1 + partie 2) est de 2 heures.
- Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé.
- La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1. Soit f la fonction définie par $f(x, y) = x((\ln x)^2 + y^2)$.

1. Préciser le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f. Le domaine $\mathcal{D}$ est-t-il ouvert ?
2. Déterminer les points critiques de f et en donner la nature.
3. Calculer, s'ils existent,

$$\min_{\mathcal{D}} f \qquad \text{et} \qquad \max_{\mathcal{D}} f.$$

Exercice 2. Soit $v = (v_1, v_2)$ une direction de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire un vecteur de $\mathbb{R}^2$ de norme unitaire. Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

1. Rappeler la définition de $\frac{\partial f}{\partial v}$ et la relation entre $\frac{\partial f}{\partial v}$ et les dérivées partielles de f.
2. Soit $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction non constante de classe C^1 et f la fonction composée définie par $f(x, y) = g(1 + 2x + 3y)$. Exprimer les dérivées partielles de f en fonction de la dérivée de g.
3. Trouver les directions v telles que $\frac{\partial f}{\partial v}(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3. On considère la fonction

$$f(x, y) = \cos(x^2) - \cos(y^2).$$

1. Étudier l'existence et éventuellement calculer les limites

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} \frac{f(x, y)}{x^4 + y^4} \right), \qquad \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} \frac{f(x, y)}{x^4 + y^4} \right) \qquad \text{et} \qquad \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x, y)}{x^4 + y^4}.$$

2. À partir du développement limité de la fonction $t \mapsto \cos(t)$, écrire le développement limité d'ordre 4 centré en $(0, 0)$ de la fonction f
3. Étudier l'existence et éventuellement calculer la limite

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}.$$

Corrigé de l'examen du 12/1/2018 (Partie 2)

Exercice 1

1) $f(x,y) = x\left((\ln x)^2 + y^2\right)$.

1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ est le domaine de définition de f.

$$\begin{cases} (\ln x)^2 + y^2 + 2\ln x = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} , \quad x > 0$$

$\Rightarrow \boxed{y = 0}$

$\Rightarrow (\ln x)^2 + 2\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0$ ou $-2 \Rightarrow x = 1$ ou $x = e^{-2}$

Les points critiques sont $(1,0)$ et $(e^{-2},0)$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2\ln x + 2}{x} & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \qquad H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad H_f(e^{-2},0) = \begin{pmatrix} -2e^2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{e^2} \end{pmatrix}$$

en $(1,0)$: $rt - s^2 = 4 > 0$ et $r = 2 > 0$. Donc $(1,0)$ p. de min local

en $(e^{-2},0)$: $rt - s^2 = -4 < 0$. Donc $(e^{-2},0)$ point de col

Observons qu'on a $f \geq 0$ sur D et $f(1,0) = 0$.

3) Donc $\min_D f(x,y) = f(1,0) = 0$. D'autre part $\nexists \max_D f(x,y)$,

comme on le voit en observant que $\lim_{y \to +\infty} f(1,y) = \lim_{y \to +\infty} y^2 = +\infty$.

$\boxed{\text{Exercice 2}}$ $v=(v_1,v_2)$, $\|v\|=1$

1) $\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+hv_1, y+hv_2)-f(x,y)}{h}$

Pour les fonctions de classe C1: $\frac{\partial f}{\partial v} = v_1 \frac{\partial f}{\partial x} + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}$

2) $f(x,y) = g(1+2x+3y)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g'(1+2x+3y)\cdot 2$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g'(1+2x+3y)\cdot 3$

3) Posons $0 = \frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g'(1+2x+3y)\cdot(2v_1+3v_2)$

Pour que cette égalité soit satisfaite $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ il faut $2v_1+3v_2=0$

les directions qui conviennent sont alors

$v = \frac{(3,-2)}{\sqrt{13}}$ et $v' = \frac{(-3,2)}{\sqrt{13}}$.

$\boxed{\text{Exercice 3}}$

$f(x,y) = \cos(x^2) - \cos(y^2)$

1) $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{f(x,y)}{x^4+y^4}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)-1}{x^4} = -\frac{1}{2}$

$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{f(x,y)}{x^4+y^4}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos(y^2)}{y^4} = \frac{1}{2}$

$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^4+y^4}$, puisque les deux limites itérées sont distinctes

2) On a, pour $t\to 0$, $\cos t = 1-\frac{t^2}{2}+O(t^4)$, donc, pour $(x,y)\to(0,0)$

$f(x,y) = 1-\frac{x^4}{2} - 1 + \frac{y^4}{2} + O(x^6) + O(y^6) = -\frac{x^4}{2}+\frac{y^4}{2} + o(\|(x,y)\|^4)$

3) On a $\left|\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{2}\frac{x^4}{x^2+y^2} + \frac{1}{2}\frac{y^4}{x^2+y^2} + C\|(x,y)\|^2$ (où $C>0$)

$\le \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + C\|(x,y)\|^2 \longrightarrow 0$ pour $(x,y)\to(0,0)$.