Solution de l'exercice 9 :
a) Il n'y a de problème de convergence qu'en la borne infinie. On calcule dans un premier temps, pour $b \geq 0$ l'intégrale :

$$I(b) = \int_0^b \sin t \, dt = [-\cos t]_0^b = 1 - \cos b.$$

On sait que le cosinus n'a pas de limite à l'infini ; l'expression $I(b)$ non plus, donc : autrement dit, l'intégrale diverge.
b) Il n'y a de problème de convergence qu'en la borne infinie. On calcule dans un premier temps, pour $b \geq 0$ l'intégrale :

$$I(b) = \int_0^b e^{-x} \, dx = [-e^{-x}]_0^b = 1 - e^{-b}.$$

Quand b tend vers l'infini, l'expression $I(b)$ tend vers 1. L'intégrale proposée converge donc, et vaut 1.
c) Ici les deux bornes posent problème, mais vu la parité de la fonction ce qui se passe sur $]-\infty, 0]$ n'est que le reflet de ce qui se passe sur $[0, +\infty[$, et ce qui se passe sur $[0, +\infty[$, on l'a traité à la question précédente. Les deux intégrales de $-\infty$ à 0 et de 0 à $+\infty$ sont donc toutes deux convergentes, et l'intégrale proposée aussi, de valeur $1 + 1 = 2$.
d) Il n'y a de problème de convergence qu'en la borne infinie. On calcule dans un premier temps, pour $b \geq 0$ l'intégrale :

$$I(b) = \int_0^b e^{-t} \cos t \, dt.$$

On fait une première intégration par parties, avec $u(t) = e^{-t}$, $u'(t) = -e^{-t}$, $v(t) = \sin t$, $v'(t) = \cos t$:

$$I(b) = [e^{-t} \sin t]_0^b + \int_0^b e^{-t} \sin t \, dt = e^{-b} \sin b + \int_0^b e^{-t} \sin t \, dt.$$

On recommence avec $u(t) = e^{-t}$, $u'(t) = -e^{-t}$, $v(t) = -\cos t$, $v'(t) = \sin t$:

$$I(b) = e^{-b} \sin b + [-e^{-t} \cos t]_0^b - \int_0^b e^{-t} \cos t \, dt = 1 + e^{-b}(\sin b - \cos b) - I(b).$$

On en déduit que :

$$I(b) = \frac{1 + e^{-b}(\sin b - \cos b)}{2}$$

.
Quand b tend vers l'infini, l'exponentielle tend vers zéro tandis que la parenthèse trigonométrique reste bornée. On en déduit que $I(b)$ tend vers $\frac{1}{2}$ donc que l'intégrale proposée converge, vers $\frac{1}{2}$.
e) C'est une intégrale de Riemann, je renvoie au cours.
f) Là aussi.
g) On observe que la borne à problème est 0. Pour $a \in]0, 1[$ on calcule alors :

$$I(a) = \int_a^1 \ln x \, dx = [x \ln x - x]a^1 = -1 + a - a \ln a$$

Par « croissance comparée », cette dernière quantité tend vers -1 quand a tend vers zéro. C'est donc que l'intégrale proposée converge, vers -1.
h) Il n'y a de problème de convergence qu'en la borne infinie. On calcule dans un premier temps, pour $b \geq 1$ l'intégrale :

$$I(b) = \int_1^b \frac{\ln x}{x^2} \, dx.$$

On fait une intégration par parties, avec $u(x) = \ln x$, $u'(x) = 1/x$, $v(x) = -1/x$, $v'(x) = 1/x^2$:

$$I(b) = [-\frac{\ln x}{x}]_1^b + \int_1^b \frac{1}{x^2} \, dx = 1 - \frac{1}{b} - \frac{\ln b}{b}.$$

Quand on fait tendre b vers l'infini, ceci tend vers 1 et donc l'intégrale proposée existe et vaut 1.

Solution de l'exercice 10 :
a) Le problème concerne la seule borne 1. En tout état de cause, on peut factoriser $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{1+x} \times \dfrac{1}{1-x}$ et minorer ainsi :

$$0 \leq \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} \leq \frac{1}{1-x^2}$$

Or le comportement de l'intégrale de la fonction au centre de ces inégalités au voisinage de 1 est le même que celui de $y \mapsto \dfrac{1}{y}$ au voisinage de 0 (faire le changement de variable $y = 1-x$). Ce dernier a une intégrale divergente, donc l'intégrale proposée aussi.
b) Le problème ne concerne que la borne infinie. On encadre ici :

$$0 \leq \frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

Prise en sandwiche entre deux fonctions dont les intégrales convergent, la fonction proposée a elle aussi une intégrale convergente.
c) Le problème ne se pose qu'en l'infini. On voit que la fonction intégrée tend vers l'infini quand x tend vers l'infini. En particulier elle est minorée par la fonction constante 1 pour x assez grand. Son intégrale diverge donc.
Solution de l'exercice 11 :
a) Il n'y a de problème de convergence qu'en la borne infinie. On calcule dans un premier temps, pour $b \geq 0$ l'intégrale :

$$I(b) = \int_0^b x^2 e^{-x}\, dx.$$

On fait une première intégration par parties, avec $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$, $v(x) = -e^{-x}$, $v'(x) = e^{-x}$:

$$I(b) = [-x^2e^{-x}]_0^b + 2\int_0^b xe^{-x}\, dx = -b^2e^{-b} + 2\int_0^b xe^{-x}\, dx.$$

On recommence avec $u(x) = x$, $u'(x) = 1$, $v(x) = -e^{-x}$, $v'(x) = e^{-x}$:

$$I(b) = -b^2e^{-b} + 2[-xe^{-x}]_0^b + 2\int_0^b e^{-x}\cos t\, dx = 2 - e^{-b}(b^2 + 2b + 2).$$

On en déduit que $I(b)$ tend vers 2 quand b tend vers l'infini, autrement dit que l'intégrale converge et vaut 2.
b) Il n'y a de problème de convergence qu'en la borne infinie. On calcule dans un premier temps, pour $b \geq 0$ l'intégrale :

$$I(b) = \int_0^b xe^{-x^2}\, dx.$$

Pour ce faire, on reconnaît (à une constante près) dans la fonction intégrée la dérivée de $x \mapsto e^{-x^2}$ et on en déduit que :

$$I(b) = \int_0^b xe^{-x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^b = \frac{1-e^{-b^2}}{2}.$$

En faisant tendre b vers l'infini, on en déduit que l'intégrale converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.
cb) Il n'y a de problème de convergence qu'en la borne infinie. On calcule dans un premier temps, pour $b \geq 0$ l'intégrale :

$$I(b) = \int_2^b \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx.$$

Pour ce faire, on reconnaît (à une constante près) dans la fonction intégrée la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$ et on en déduit que :

$$I(b) = \int_2^b \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^b = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln b}.$$

En faisant tendre b vers l'infini, on en déduit que l'intégrale converge et vaut $\frac{1}{\ln 2}$.

Solution de l'exercice 12 :

a) Le monôme significatif est x^2 à l'infini.

b) Et c'est x^3 en zéro.

c) Le plus gros des quatre termes est 5^n et c'est la réponse attendue.

d) Les équivalents se multiplient, la réponse est donc $x^3 \times x^2 = x^5$.

e) Il est notoire que $\sin x \sim x$ en 0 ; la réponse est donc $x^3 \times x = x^4$.

f) Le cosinus tend vers la constante non nulle 1 en zéro ; il est donc équivalent à cette constante. La réponse attendue est donc $x^3 \times 1 = x^3$.

g) Les équivalents passent à la racine carrée, la réponse attendue est donc $x^{3/2}$.

h) Les équivalents se divisent, la réponse attendue est donc $n^5/n^4 = n$.

Solution de l'exercice 13 :

a) On sait que $\sin u \sim u$ quand u tend vers zéro. Or quand n tend vers l'infini, $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ tend vers zéro. Ceci permet d'écrire que :

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Ce dernier équivalent n'est pas encore dans son état le plus simple possible, en utilisant $n+1 \sim n$ puis en passant à la racine et à l'inverse on conclut que :

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

b) Ici le sinus tend vers la constante non nulle $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ quand n tend vers l'infini. Cette constante est donc l'équivalent cherché.

c) Le sinus présent ici est l'opposé de celui étudié au a) tandis que $\sqrt{n+2} \sim \sqrt{n}$. L'expression proposée est donc équivalente à -1 (ce qui signifie tout simplement qu'elle tend vers ce réel).

d) On observe que $e^{1/n}$ tend vers $e^0 = 1$ donc que l'expression proposée est équivalente à $e^{n^2+1} = ee^{n^2}$. On ne peut pas faire plus simple.

Solution de l'exercice 14 :

a) Cette question repose sur le développement limité bien connu du cosinus, on écrit (pour x tendant vers zéro) :

$$\cos x - 1 = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{2}$$

b) Même principe, ici on écrit :

$$e^x - 1 - x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim \frac{x^2}{2}$$

c) Ici :

$$\cos x - \sqrt{1-x^2} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right) = \frac{x^4}{6} + o(x^4) \sim \frac{x^4}{6}$$

d) Comme $\frac{1}{n}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini, on peut se servir de $\ln(1+u) = u + o(u) \sim u$ et conclure que la suite proposée est équivalente à $\frac{1}{n}$.

e) On a à pousser d'un cran le développement limité du logarithme, en jetant la plupart des termes dans la « poubelle »$o(1/n^2)$, précisément :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} = \left(\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{2n^2}$$

f) On l'a déjà rencontré au 4c, la réponse étant $\ln n$, après un calcul écrit en son temps.
g) C'est un classique qui tend vers e donc est équivalent à e (passer en forme exponentielle).

Solution de l'exercice 15 :

a) Le problème est localisé à la borne 0. En cette borne la fonction intégrée est équivalente à $\frac{1}{\sqrt{x}}$, qui est une fonction à valeurs positives, et dont l'intégrale en 0 est convergente (Riemann). L'intégrale converge donc.
b) Ici le problème est en l'infini et l'équivalent (positif) est $\frac{1}{x^2}$, d'intégrale convergente. Là aussi convergence.
c) Quand on a comme ici un problème aux deux bornes, on coupe le problème en deux - par exemple au point intermédiaire 1. On constate alors avoir traité les deux sous-problèmes aux deux questions précédentes. L'intégrale converge donc.
d) Le problème est localisé en l'infini, où la fonction à traiter est équivalente à $\frac{x^3}{x^5} = \frac{1}{x^2}$ tout aussi positive et à intégrale tout aussi convergente que deux lignes plus haut. L'intégrale converge donc.
e) Le problème est ici en 0 et se traite avec l'équivalent du 13a, qui est une fonction à valeurs positives. On sait que l'intégrale de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ diverge en 0 (et que la fonction intégrée y est de signe constant). Il en est donc de même pour celle que nous avons à étudier ici.
f) C'est de nouveau une fonction en $\frac{1}{x^2}$ en 0. Divergence !

Solution de l'exercice 16 :

a) Le terme général de la série considérée est équivalent à $\frac{1}{n}$, qui est positif. La série proposée se comporte donc comme la série harmonique : elle diverge.
b) Ici la série proposée se comporte comme la série géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et converge.
c) Ici l'équivalent (positif) est $\frac{1}{n^3}$. Convergence !
d) En profitant si nécessaire du 13d, on constate que le terme général de la série à étudier est équivalent à celui de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$, qui est à termes positifs et convergente.

Solution de l'exercice 17 :

a) Ici on s'aperçoit que l'intégrale est à problèmes aux deux bornes ; il faut donc la casser en deux et prouver d'une part la convergence en zéro, d'autre part la convergence en l'infini.
En zéro, la fonction intégrée est équivalente à la fonction positive $x \mapsto x^{a-1}$. Vu l'hypothèse selon laquelle $a > 0$ et vu le critère de Riemann en zéro, son intégrale converge donc.
En l'infini, on vérifie aisément que la fonction intégrée est un o de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, fonction à valeurs positives dont l'intégrale est notoirement convergente. La fonction intégrée a donc aussi une intégrale convergente.
b) On fixe un $a > 0$, deux bornes avec $0 < r < s$ et on réalise une intégration par parties entre ces deux bornes, en utilisant $u(x) = x^a$, $u'(x) = ax^{a-1}$, $v(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = e^{-x}$.
On écrit alors :

$$\int_r^s x^{(a+1)-1} e^{-x}\, dx = r^a e^{-r} - s^a e^{-s} + a \int_r^s x^a e^{-x}\, dx$$

identité dans laquelle on fait tendre s vers l'infini, obtenant :

$$\int_r^\infty x^{(a+1)-1} e^{-x}\, dx = r^a e^{-r} + a \int_r^\infty x^a e^{-x}\, dx$$

nouvelle identité dans laquelle on fait tendre r vers zéro, obtenant :

$$\int_0^\infty x^{(a+1)-1} e^{-x}\, dx = a \int_0^\infty x^a e^{-x}\, dx$$

ce qu'il fallait démontrer.
c) On initialise par le calcul facile de $\Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1$. Par une récurrence très facile sur n, en utilisant le b) on obtient en deux lignes pour tout $n \geq 0$ l'identité $\Gamma(n+1) = n!$.

Solution de l'exercice 18 :
Dans chacune des questions, on notera f la limite simple éventuellement trouvée, puis $M_n = \|f_n - f\|_\infty$ (la norme étant calculée sur l'intervalle suggéré localement).
a) On commence par fixer x dans l'intervalle d'étude. Quand n tend vers l'infini, $f_n(x)$ tend vers zéro : la suite de fonctions (f_n) tend donc vers la fonction nulle.
On fixe ensuite, provisoirement, n. Quand x tend vers zéro, $f_n(x) - f(x) = f_n(x) = \dfrac{1}{nx}$ tend vers l'infini, donc $M_n = +\infty$.
On cesse de fixer n, et on le fait tendre vers l'infini. On constate que M_n ne tend pas vers zéro, la convergence de (f_n) vers f n'est donc pas uniforme.
b) On commence par fixer x dans l'intervalle d'étude. Quand n tend vers l'infini, $f_n(x)$ tend vers zéro : la suite de fonctions (f_n) tend donc vers la fonction nulle.
On fixe ensuite, provisoirement, n. Pour x variant dans $[1, 2]$, $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = \dfrac{1}{nx}$ est une fonction décroissante de x et prend donc sa valeur maximale en la borne gauche de l'intervalle, d'où $M_n = \dfrac{1}{n}$.
On cesse de fixer n, et on le fait tendre vers l'infini. On constate que M_n tend vers zéro, la convergence de (f_n) vers f est donc uniforme.
c) On commence par fixer x dans l'intervalle d'étude. On doit distinguer deux cas ; tout d'abord quand x est nul, la suite des $(f_n(0))$ est constante (tous ses termes valent 1) et tend donc vers 1. Dans le cas générique, celui où $x \neq 0$, $f_n(x)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini. La suite de fonctions (f_n) tend donc vers la fonction qui prend la valeur 1 au point 0, la valeur 0 partout ailleurs.
Chaque f_n est une fonction continue, leur limite simple ne l'est pas. La convergence ne peut donc être uniforme.
d) Pour la première partie, c'est pareil qu'à la question précédente à ceci près qu'il n'y a plus à traiter le cas particulier d'un x nul : la limite simple est la fonction nulle.
Pour la convergence uniforme, on procède comme au b) : la fonction $|f_n - f| = f_n$ est strictement décroissante sur l'intervalle d'étude, donc $M_n = f_n(1)$ qui tend ensuite vers zéro (soit en l'explicitant, soit même sans l'expliciter puisque la convergence simple de f_n vers la fonction nulle entraîne en particulier la convergence de la suite numérique $(f_n(1))$ vers 0.
e) Pour la convergence simple, c'est comme au c) ci-dessus, on trouve là aussi la limite simple f nulle en dehors de 0 mais qui prend la valeur 1 en zéro.
Et pour la convergence uniforme, c'est « non » pour la même raison qu'au c).
f) Désormais la limite simple est nulle. Pour la limite uniforme on fonctionne comme au b) ou au d) en profitant encore d'une décroissance stricte. Comme dans ces questions, la réponse est positive.
g) C'est comme le f).
Solution de l'exercice 19 :
1) Pour éviter des redites inutiles, on fusionnera la question 1 avec une partie de la question 3 et on étudie d'un seul coup les convergences simples sur $[0, +\infty[$.
La méthode est simple : on annonce avec fermeté qu'on **fixe le réel** positif x. Puis on fait tendre n vers l'infini.

Commençons par (f_n). Il n'y a pas l'ombre d'une forme indéterminée dans la suite $(f_n(x))$: celle-ci tend vers $0 + \arctan x = \arctan x$ quand n tend vers l'infini.
On conclut en affirmant que la suite de fonctions (f_n) converge **simplement** vers la fonction $f = \arctan$ sur $[0, +\infty[$ (et donc sur tout sous-ensemble de cet intervalle).

On fait de même avec (g_n). On doit être un peu prudent : en général, c'est-à-dire si $x = 0$, le comportement de la suite $(g_n(x))$ se traite en considérant un équivalent du dénominateur, à savoir nx puis en écrivant que $g_n(x) \sim 1$ donc $g_n(x) \to 1$ quand n tend vers l'infini ; mais si $x = 0$ ce serait une boulette puisqu'on écrirait un équivalent à 0 ce qui n'est pas une bonne chose. Quand $x = 0$, de fait, la suite $(g_n(0))$ est bêtement la suite nulle et converge vers 0. On synthétise en posant $g(x) = 0$ si $x = 0$ et $g(x) = 1$ ailleurs et on peut alors affirmer que (g_n) converge **simplement** vers la fonction g sur $[0, +\infty[$ (et donc sur tout sous-ensemble de cet intervalle).

2) La méthode standardisée d'étude d'une convergence uniforme est la suivante :
* fixer provisoirement n (je le fais avec grande lourdeur dans ce chapitre, pour bien insister)

* poser $M_n = \|f_n - f\|_\infty$. Idéalement calculer M_n ; si ça se révèle un peu difficile, se contenter de l'estimer
* cesser de fixer n (toujours lourd, je l'annonce à chaque fois explicitement, quand je suis dans ce chapitre).
* lorsqu'il y a convergence uniforme, montrer que M_n tend vers zéro, et annoncer qu'on a fini. Lorsqu'il n'y a pas convergence uniforme, montrer que M_n ne tend pas vers zéro puis répéter une phrase stéréotypée, et annoncer qu'on a fini.
Lorsque la réponse est « non », il arrive souvent qu'on échappe à ce plan standardisé en montrant qu'un des énoncés que la convergence uniforme impliquerait est violé.
Bon, tout ça est bien gentil, mais ce sera plus clair sur des exemples.
On va commencer par (f_n), qui va donner un exemple simple de réponse affirmative.

Fixons donc, provisoirement, un entier $n \geq 1$, et posons $M_n = \|f_n - f\|_\infty$, où il est entendu qu'il s'agit des restrictions de f_n et de f à l'intervalle $[0, 1]$.
On va ici calculer tout à fait explicitement M_n. Pour ce, on commence par expliciter, pour $x \in [0, 1]$ la valeur $|f_n(x) - f(x)| = \left|\dfrac{x}{x+n}\right| = \dfrac{x}{x+n}$.
Se refusant à trouver des artifices de calcul plus élégants (il y en a), on dérive très stupidement cette dernière expression comme fonction de x, et on constate que sa dérivée, qui est $\dfrac{n}{(x+n)^2}$ est strictement positive. La valeur maximale de cette fonction est donc atteinte en la borne droite de l'intervalle de définition, et $M_n = (f_n - f)(1) = \dfrac{1}{n+1}$.
On cesse alors de fixer n.
Puis on fait tendre n vers l'infini. On constate que M_n tend vers 0. Ceci prouve, par définition, la convergence **uniforme** de (f_n) vers f sur $[0, 1]$.
Pour les intervalles plus petits suggérés ensuite, la convergence sur un gros intervalle entraîne la convergence des restrictions sur un intervalle plus petit : la convergence est donc uniforme également sur $]0, 1]$ puis sur $[a, 1]$.
Passons à g_n.

On va commencer par traiter g_n avec exactement le même plan, on se retournera à la fin pour remarquer qu'on aurait pu aller plus vite.
Fixons donc, provisoirement, un entier $n \geq 1$, et posons $M_n = \|g_n - g\|_\infty$, où il est entendu qu'il s'agit des restrictions de g_n et de g à l'intervalle $[0, 1]$.
On va ici calculer tout à fait explicitement M_n. Pour ce, on commence par expliciter, pour $x \in]0, 1]$ la valeur $|g_n(x) - g(x)| = \left|\dfrac{nx}{1+nx} - 1\right| = \left|-\dfrac{1}{1+nx}\right| = \dfrac{1}{1+nx}$. Ici il faut traiter à part $|g_n(0) - g(0)| = |0 - 0| = 0$.
On dérive ensuite stupidement la fraction $\dfrac{1}{1+nx}$ comme fonction de x, et on constate que sa dérivée, qui est $-\dfrac{n}{(1+nx)^2}$ est strictement négative. La borne supérieure de cette fonction est donc égale à sa limite en la borne gauche de son intervalle d'étude, à savoir 0, limite qui est égale à 1. On note au passage que $|g_n(0) - g(0)| = 0 \leq 1$ et on conclut que $M_n = 1$.
On cesse alors de fixer n.
Puis on fait tendre n vers l'infini. On constate que M_n ne tend pas vers 0.
C'est le moment annoncé de finir par une phrase stéréotypée : on vient de montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme de la suite (g_n) vers g. Par ailleurs, s'il y a convergence uniforme, c'est nécessairement vers la limite simple. Il n'y a donc pas convergence uniforme de (g_n).
Bon, ce n'était pas très difficile mais quand même assez long. Ne pouvait-on faire plus rapidement ?

Oui on pouvait. En jouant sur le théorème de continuité des limites uniformes. On constate que chaque g_n est continue, tandis que g ne l'est pas. Par application du théorème de continuité des limites uniformes, ceci prouve que la suite (g_n) ne peut pas converger uniformément vers g. On replace la phrase stéréotypée écrite ci-dessus et on a fini.

On a maintenant à traiter (g_n) sur l'intervalle $]0, 1]$. On peut refaire la version longue, en revenant à la définition de la convergence uniforme, en un peu plus court puisqu'on n'a pas à faire de remarque sur $g_n(0)$ et $g(0)$; on conclut exactement comme plus haut à la non-convergence. Une autre façon de raisonner est de fonctionner par l'absurde : sur $\{0\}$, il y a convergence uniforme puisque sur un ensemble fini la convergence simple entraîne immédiatement la convergence uniforme. Si on l'avait aussi sur $]0,1]$ on l'aurait sur la réunion $[0,1]$ des deux domaines de restriction (notez que ça marche pour une union finie seulement !). Or on ne l'a pas, donc on ne l'a pas non plus sur $]0,1]$. Une dernière façon est de reposer sur les théorèmes de passage à la limite - qui ne sont qu'une petite variante des raisonnements de continuité utilisés sur $[0,1]$: puisque chaque g_n tend vers 0 quand x tend vers 0, la limite uniforme éventuelle de (g_n) sur $]0,1]$ ne pourrait être qu'une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers 0 dans cet intervalle, or la fonction g, qui est la fonction constante égale à 1, ne tend pas vers zéro.

Il reste enfin à traiter de la suite (g_n) sur $[a,1]$. Là le calcul à base d'étude des variations de $|g_n - g| = g - g_n$ fait plus haut devient assez incontournable. Vu la décroissance de cette fonction, sa plus grande valeur est prise à gauche de l'intervalle c'est-à-dire en a, donc $M_n = g(a) - g_n(a)$ (qu'il est plus intelligent de ne pas calculer davantage).
Cessons désormais de fixer n. Alors vu la convergence simple de g_n vers g, $g_n(a)$ tend vers $g(a)$ quand n tend vers l'infini. Et donc M_n tend vers 0, ce qui prouve la convergence uniforme.
Remarquons au passage qu'il a donc convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[\frac{1}{k},1]$ mais pas sur leur réunion, qui est l'intervalle $]0,1]$.

3) C'est assez similaire à ce qu'on a fait au 2, les rôles de f et de g s'échangeant.

On commence par f, pour laquelle la convergence uniforme va échouer. Cela se justifie bien avec les théorèmes de passage à la limite : chaque f_n tend vers $1+\frac{\pi}{2}$ quand x tend vers l'infini, tandis que $f(x) = \arctan x$ tend vers $\frac{\pi}{2}$. Ceci empêche que (f_n) ne converge uniformément vers f. Comme une suite de fonctions ne peut converger uniformément que vers sa limite simple, ceci exclut que (f_n) converge vers quoi que ce soit.

On continue avec g. Là au contraire la réponse va être positive, par le même raisonnement qu'on a utilisé sur $[a,1]$: vu la décroissance de la fonction positive $g - g_n$, sur l'intervalle d'étude le maximum de $|g_n - g|$ est atteint au point 1, autrement dit $M_n = g(1) - g_n(1)$. Quand on cesse de fixer n et qu'on le fait tendre vers l'infini, cette quantité tend vers 0 ce qui est exactement, par définition, la convergence uniforme de (g_n) vers g.
Solution de l'exercice 20 :
1) Puisqu'on nous demande d'étudier une convergence simple, on va d'abord fixer un x dans $[-1,1]$. Le raisonnement mène à distinguer deux cas :
* si $x \neq 0$, on majore le sinus en valeur absolue par 1, autrement dit on écrit que $0 \leq |f_n(x)| \leq e^{-nx^2} = \left(e^{-x^2}\right)^n$, et par les gendarmes on voit tout de suite que $f_n(x)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini ;
* si $x = 0$, on constate que pour tout n, $f_n(0) = 0$ donc que la suite des $f_n(0)$ tend vers 0.
En faisant la synthèse de ces deux cas, on voit que si on note f la fonction nulle, la suite (f_n) converge simplement vers f sur $[-1,1]$.

2) Fixons provisoirement n et notons $M_n = \|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty$ (étant entendu qu'on travaille en restriction à $[0,1]$). Le calcul exact de M_n n'est pas très engageant, mais on peut le minorer intelligemment : chaque valeur de la fonction $|f_n|$ est un minorant de M_n. Une valeur intéressante est la plus petite où le sinus vaut 1 car à cet endroit l'exponentielle ne sera pas encore trop petite. Plus spécifiquement, ne nous intéressons qu'à des n supérieurs ou égaux à 2 et notons $x_n = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, qui appartient bien à $[0,1]$ et qui a été choisi de telle sorte que $nx_n^2 = n\frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$, d'où $f_n(x_n) = \sin(\frac{\pi}{2})e^{-\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$. Comme dit un peu plus haut, on peut alors minorer $e =^{-\frac{\pi}{2}} = f_n(x_n) \leq M_n$.
Cessons de fixer n et faisons le tendre vers l'infini. L'inégalité qui précède assure que (M_n) ne tend pas vers zéro : la suite (f_n) ne tend pas uniformément vers f. Comme il est exclu qu'elle tende uniformément vers une autre fonction que sa limite simple, elle ne converge pas au sens de la convergence uniforme.

3) Soit $a > 0$ fixé. Fixons provisoirement n. On va de nouveau estimer $M_n = \|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty$ (étant entendu cette fois qu'on travaille en restriction à $[a,1]$). Pour tout x de $[a,1]$, on peut écrire les majorations

$|sin(nx^2)| \leq 1$ et $e^{-nx^2} \leq e^{-na^2}$ dont on déduit que $|f_n(x)| \leq e^{-na^2}$ puis, en prenant le Sup sur x, que $M_n \leq e^{-na^2}$.
Cessons désormais de fixer n et faisons le tendre vers l'infini. On constate alors que $e^{-na^2} = \left(e^{-a^2}\right)^n$ tend vers 0, donc M_n aussi. Ceci prouve la convergence uniforme de f_n vers la fonction nulle f sur $[a, 1]$.

Solution de l'exercice 21 : Avant de nous lancer dans la question posée, intéressons nous à la convergence simple de la suite (f_n) sur $[0, 1]$. Ceci se traite en fixant une valeur de x dans cet intervalle. Si cette valeur est strictement inférieure à 1, l'étude de la suite $(f_n(x))$ ne se heurte à aucune difficulté : sans l'ombre d'une forme indéterminée, elle converge vers 0. Le cas où $x = 1$ doit être traité à part. Pour cette valeur spécifique, on a l'égalité $f_n(1) = \dfrac{1}{2e}$, valable pour tout n ; la suite numérique $(f_n(1))$, constante, tend donc vers $\dfrac{1}{2e}$.
Finalement si on note f la fonction qui est nulle sur $[0, 1[$ et prend la valeur $\dfrac{1}{2e}$ au point 1, on a ainsi prouvé que la suite de fonctions (f_n) converge vers f.

Sur $[0, 1]$ et sur $[0, 1[$, il n'y a pas convergence uniforme. Je n'écris pas les détails tant c'est similaire à la suite (g_n) de l'exercice 19 : c'est parce qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue, ou parce qu'une limite uniforme de fonctions qui ont une même limite doit avoir la même limite.

Fixons désormais un $a \in]0, 1[$. On va sans suprise montrer que, en restriction à l'intervalle $[0, a]$, la suite (f_n) converge vers la fonction nulle f. Pour ce faire, on fixe provisoirement n et on regarde de près la fonction $x \mapsto |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| = f_n(x)$, et notons M_n sa borne supérieure. On va majorer cette quantité, l'étude des variations de f_n ne semblant pas particulièrement facile.

On majore les facteurs du numérateur : pour tout x de $[0, a]$, $0 \leq x^n \leq a^n$ et $0 \leq e^{-x} \leq 1$, et on minore le dénominateur : $0 < 1 \leq 1 + x^n$. En mettant tout cela ensemble puis en passant à la borne supérieure, on obtient $0 \leq f_n(x) \leq a^n$ puis $M_n \leq a^n$.
Cessons alors de fixer n et faisons le tendre vers l'infini. On constate que M_n tend vers zéro : c'est donc qu'il y a convergence uniforme.

Solution de l'exercice 22 :
1) La convergence simple peut sembler un peu déstabilisante, le raisonnement suivi sortant un peu de l'ordinaire sans être bien difficile. Il sera important d'avoir l'esprit clair : la première chose que nous faisons est de fixer un x dans $[0, 1[$ qui n'a pas vocation à bouger.
On doit alors réfléchir au comportement de la suite numérique $(f_n(x))$ quand n tend vers l'infini ; autrement dit comprendre comment se comporte $\min(n, \dfrac{1}{\sqrt{1-x}})$ quand n tend vers l'infini.

Si on a l'esprit vif, on réalise que dès que n est suffisamment grand (explicitement dès que n est strictement supérieur à la partie entière de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$), ce minimum est égal à $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ puisque ce dernier réel ne bouge pas tandis que n croît jusqu'à le dépasser. La suite des $(f_n(x))$ est en fait une suite constante à partir d'un certain rang, rang à partir duquel elle vaut $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. Elle est donc convergente, et convergente vers $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.
En notant cette expression $f(x)$, on vient ainsi de prouver la convergence simple de la suite (f_n) vers la fonction f.

2) Dans cette question, au contraire, on fixe n. Quand x tend vers 1^-, l'expression $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ tend vers l'infini ; pour dire cela informellement la fonction $f(x)$ finit par dépasser n et le minimum de n et $f(x)$ finit par se stabiliser à n. Plus précisément, on constate que dès que $x \geq 1 - \dfrac{1}{n^2}$, on peut écrire $0 < 1 - x \leq \dfrac{1}{n^2}$ puis $0 < \sqrt{1-x} \leq \dfrac{1}{n}$ puis $0 < n \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ et donc $f_n(x) = n$. D'où on déduit aussitôt que $f_n(x)$ tend vers n quand x tend vers 1^-.

3) Je ne suis pas sûr d'avoir bien compris où l'énoncé voulait en venir. En tous cas, si on appelle M_n la borne supérieure de $|f - f_n| = f - f_n$ sur $[0, 1[$, on constate très vite que $M_n = +\infty$ puisque la fonction dont on souhaiterait calculer la borne supérieure tend vers $+\infty$ en 1^-. De façon particulièrement visible, M_n ne tend pas vers 0 : il n'y a donc pas convergence uniforme de f_n vers f. Comme il ne peut y avoir de convergence uniforme vers une autre fonction que la limite simple, il n'y a pas convergence uniforme de la suite (f_n), vers quelque fonction limite que ce soit.

Solution de l'exercice 23 :
1) On fixe un x dans $[0, 1]$. On traite à part le cas où $x = 0$: dans ce cas tous les $f_n(0)$ valent 0 et la suite $(f_n(0))$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
Pour $x \neq 0$, on constate que quand n tend vers l'infini le dénominateur est équivalent à $2^n nx^2$, donc que $f_n(x)$ est équivalent à $\dfrac{1}{nx}$ quand n tend vers l'infini. En particulier, il tend vers 0.
La suite de fonctions (f_n) tend donc vers la fonction nulle.

2) On écrit sans peine que :

$$I_n = \int_0^1 \frac{2^n x}{1 + 2^n nx^2} = \left[\frac{1}{2n} \ln\left(1 + 2^n nx^2\right)\right]_0^1 = \frac{\ln(1 + 2^n n)}{2n} = \frac{\ln(2^n n(1 + \frac{1}{2^n n}))}{2n}$$

dont on déduit que, quand $n \to +\infty$:

$$I_n = \frac{n \ln 2}{2n} + \frac{\ln n}{2n} + o(1) = \frac{\ln 2}{2} + o(1)$$

La suite numérique (I_n) converge donc vers le réel $\dfrac{\ln 2}{2}$.
Si la suite (f_n) était uniformément convergente, ce ne pourrait être que vers sa limite simple, à savoir la fonction nulle - dont l'intégrale sur $[0, 1]$ est nulle. Mais si c'était le cas, la convergence uniforme impliquant la convergence des intégrales sur les intervalles de longueur finie, la suite (I_n) convergerait vers 0. Ce qu'elle ne fait pas.

3) Comme à la question précédente, on peut d'abord remarquer que l'éventuelle convergence uniforme de la suite (f_n) n'est envisageable que vers la fonction nulle notée f, On se penche ensuite, pour n fixé, sur la quantité $\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty$ qu'on note M_n. On se penche ensuite sur la valeur $f_n\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$: puisque c'est une valeur prise par $f_n = |f_n|$, ce réel minore M_n. Or ce réel vaut $\dfrac{1}{1 + \frac{n}{2^n}}$ et tend donc vers 1 quand n tend vers l'infini. Ceci exclut que M_n puisse tendre vers zéro, et exclut ainsi la convergence uniforme de la suite (f_n).

Solution de l'exercice 24 :
1) On fixe un x réel. Quand n tend vers l'infini, le numérateur est équivalent à ne^{-x} tandis que le dénominateur est équivalent à n. La suite de fonctions (f_n) tend donc simplement vers la fonction f définie par $f(x) = e^{-x}$.

2) On fixe provisoirement $n \geq 1$ et, pour x élément de $[a, b]$, on explicite la différence :

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{ne^{-x} + x^2 - ne^{-x} - x^2 e^{-x}}{n + x^2}\right| = \frac{x^2|1 - e^{-x}|}{n + x^2}.$$

Comme d'habitude on note ensuite $M_n = \|f_n - f\|_\infty$.
Il sera confortable de noter $M = \text{Max}_{x \in [a,b]} x^2|1 - e^{-x}|$ (qui existe puisqu'il s'agit d'une fonction continue de x sur un intervalle fermé borné). Vu l'explicitation de $|f_n(x) - f(x)|$ déroulée plus haut, et en minorant par n le dénominateur de cette expression, on obtient la majoration $M_n \leq \dfrac{M}{n}$.

On cesse alors de fixer n, et on le fait tendre vers l'infini : on constate que M_n tend vers 0, c'est-à-dire que la convergence est uniforme.

3) Pour n fixé, on fait tendre x vers l'infini : la limite en $+\infty$ de la fonction f_n est alors 1, puisque tant le numérateur que le dénominateur sont équivalents à x^2. On fait ensuite tendre n vers l'infini : la limite de cette suite de limites est la limite d'une suite constante, c'est encore 1.
Par le théorème dit de la double-limite, si (f_n) convergeait uniformément vers f, la limite de f en $+\infty$ existerait, et serait aussi égale à 1. Mais la limite de f en $+\infty$ est manifestement nulle. C'est donc que (f_n) ne converge pas uniformément vers f. Comme elle ne peut converger uniformément vers une fonction qui ne serait pas sa limite simple, elle ne converge pas uniformément.

4) Puisqu'il y a convergence uniforme de f_n vers f sur l'intervalle fermé borné $[0,1]$, tous les protagonistes étant continus sur cet intervalle, la suite d'intégrales à étudier tend vers l'intégrale sur le dit intervalle de la limite uniforme f, c'est-à-dire vers $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$.

Solution de l'exercice 25 :
1) On fixe un x de $[0,1]$. Le cas où x est nul est à traiter séparément ; dans ce cas pour tous $n \geq 2$, le réel $f_n(0)$ vaut 0 et donc la suite de ces réels tend vers 0. Supposons x non nul. Alors dès que n est suffisamment grand (explicitement dès que $\frac{2}{x} \leq n$), on est dans une situation où $\frac{2}{n} \leq x$ et donc où la deuxième formule s'applique. La suite $(f_n(x))$ est donc nulle à partir d'un certain rang, et converge vers 0. On a ainsi montré que la suite de fonctions (f_n) converge vers la fonction nulle.

2) Il suffit de calculer explicitement chacune de ces intégrales :

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{2/n} f_n(x)\,dx + \int_{2/n}^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{2/n} (-n^3x^2 + 2n^2x)\,dx = \left[-\frac{n^3}{3}x^3 + n^2x^2\right]_0^{2/n} = \frac{4}{3}$$

La suite à étudier est constante, et tend vers $\frac{4}{3}$ quand n tend vers l'infini.

Si la suite (f_n) convergeait, ça ne pourrait être que vers la limite simple de (f_n) donc vers la fonction nulle. L'intégrale de f_n sur l'intervalle de longueur finie $[0,1]$ tendrait alors vers l'intégrale de la fonction nulle, qui est nulle. Or $\dfrac{4}{3}$ n'est, lui, pas nul.

Solution de l'exercice 26 :
1) Pour chaque $n \geq 1$, on note $M_n = \|g_n\|_\infty$. On calcule sans mal M_n en faisant préalablement l'étude de la fonction (impaire) g_n sur $[0,1]$. On calcule sans mal

$$g_n'(x) = \frac{(1+nx)(1-nx)}{(1+n^2x^2)^2}$$

et on étudie son signe, dressant en conséquence le tableau des variations de g_n et constatant que $M_n = g_n(1/n)$. On calcule alors explicitement cette valeur et on obtient $M_n = 1/2n$.
Il n'y a plus qu'à faire tendre n vers l'infini et constater que M_n tend vers zéro, ceci prouve la convergence uniforme demandée par l'énoncé.

2) On commence par s'intéresser à la convergence simple de (g_n'), en utilisant son expression explicite fournie plus haut. On fixe un x dans $[-1,1]$. Si c'est zéro, on voit que pour tout n, $g_n'(0) = 1$ et donc la suite $(g_n'(0))$ est convergente, vers 1. Si le point x n'est pas nul, quand n tend vers l'infini, $g_n'(x) \sim -\dfrac{x^2n^2}{x^4n^4}$ tend vers 0. La suite de fonctions $(g_n'))$ tend donc simplement vers la fonction g nulle sauf en 0 où elle vaut 1.
Si la suite (g_n') avait une limite uniforme sur $[-1,1]$, celle-ci serait aussi limite simple, donc serait g, et elle serait aussi continue, donc ne serait pas g. Ceci prouve que la suite (g_n') n'admet pas de limite uniforme.

3) On va utiliser le théorème qui lie dérivation et convergence uniforme. On observe que pour chaque n, $f_n' = g_n$. On sait donc, depuis la première question, que la suite (f_n') est uniformément convergente sur le segment $[-1,1]$. Par ailleurs on constate que la suite $(f_n(0))$ est la suite nulle ; elle est donc convergente, vers 0. On conclut donc que (f_n) est aussi uniformément convergente sur le segment $[-1,1]$. On sait en outre que

sa limite uniforme f est dérivable, et a pour dérivée la limite uniforme des f_n', c'est-à-dire la fonction nulle. C'est donc que f est constante. On sait par ailleurs depuis peu que $f(0) = 0$, donc c'est la constante nulle et on peut conclure que f_n tend uniformément vers la fonction nulle quand n tend vers l'infini.

Solution de l'exercice 27 :

1) On commence par expliciter la dérivée $f_n'(x) = \dfrac{n^{3/2}}{n^2 + x^2}$. Une fois cette corvée accomplie, on peut sauter l'étape de la convergence simple ici, la limite simple étant très facile à deviner. On pose directement $M_n = \|f_n' - 0\|_\infty = \|f_n' - 0\|_\infty$ qu'on calcule sans mal après avoir observé que f_n' est paire, décroissante sur $[0, +\infty[$ et à valeurs positives, et donc que $M_n = f_n'(0) = n^{-1/2}$. Une fois ce calcul effectué, on fait tendre n vers l'infini, on constate que M_n tend vers zéro et on conclut à la convergence uniforme de la suite (f_n') vers la fonction nulle.

2) Soit B un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$. On peut donc trouver un segment $[-M, M]$ qui contienne l'ensemble B. Sur ce segment, la suite de fonctions $(f'n)$ est uniformément convergente (vers la fonction nulle). De plus la suite $(f_n(0))$ est la suite nulle, donc converge vers zéro. On peut donc en déduire que (f_n) est uniformément convergente, vers une primitive de la fonction nulle qui s'annule en zéro, donc vers zéro, sur le segment $[-M, M]$ et a fortiori sur l'ensemble B.

3) Si la suite (f_n) convergeait uniformément, ce serait vers sa limite simple, c'est-à-dire vers $f = 0$ au vu de la question 2. Mais la limite de f_n en $+\infty$ est $\frac{\sqrt{n}\pi}{2}$ et ne tend elle pas du tout vers la limite de f. Ceci exclut la convergence uniforme.