1a Est-ce que la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ converge ?

NON ! C'est la série dite harmonique, qui est expressément décrite dans le cours. L'exemple à retenir si on n'en retient qu'un.
Sauriez-vous montrer qu'elle diverge, et d'abord ce que ça veut dire ?

On a d'abord besoin de notations, on notera, pour n entier supérieur ou égal à 1 :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Avec cette notation, savez-vous ce qu'il faut montrer à propos des S_n ?

Absolument, il faut montrer que S_n n'a pas une limite finie quand n tend vers l'infini.
L'objectif n'étant pas de refaire le cours, je réserve pour plus loin si j'ai du temps de « rappeler » comment on peut s'y prendre. Il y a plein de façons de faire, pas forcément très compliquées mais jamais complètement évidentes.

1b Est-ce que la série de terme général 2^n converge ?

NON C'est beaucoup plus « évident » que pour la première. En effet l'ordre de grandeur des sommes partielles devrait être intuitif, et on devrait se rendre compte sans calculs, au feeling, qu'elles tendent vers l'infini. Cela n'interdit pas de faire des calculs.
Posons donc :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k$$

Savez-vous calculer S_n ?

J'espère bien que oui ! C'est une somme partielle de suite géométrique, et ça vaut donc :

$$S_n = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1.$$

On fait tendre n vers l'infini dans cette expression, et on voit que S_n tend vers l'infini : c'est donc que la série étudiée diverge.

1c Le terme général d'une série convergente tend-il forcément vers zéro ?

OUI Et c'est assez facile à montrer. Comme d'habitude, notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
Voyez vous comment reconstituer u_n à partir des sommes partielles ?

Plus précisément à partir des deux sommes partielles S_n et S_{n-1} ?

Bien vu ! On remarque que $u_n = S_n - S_{n-1}$. Et pourquoi est-ce que ça permet de conclure ?

Bien sûr, parce que si S_n tend vers un réel S, S_{n-1} fait la même chose (composition de limites), donc u_n tend vers $S - S = 0$.

1d Est-ce que si la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge on peut conclure que u_n tend vers zéro ?

OUI Et ça découle très facilement du 1c. Comment ?

Par le 1c, $(-1)^n u_n$ tend vers zéro. Comme $u_n = (-1)^n[(-1)^n u_n]$, elle s'écrit comme produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers zéro. Elle tend donc elle-même vers zéro.

1e Est-ce que si u_n tend vers zéro, alors la série de terme général u_n converge ?

NON. L'exemple de la série harmonique est là pour vous empêcher définitivement de faire cette erreur.

1f Soit une série dont le terme général est de la forme $(-1)^n u_n$ où les u_n sont tous strictement positifs et tendent vers zéro. Est-ce que cette série converge nécessairement ?

NON Mais cette question est significativement plus difficile que les autres de l'exercice. Ce qui devrait vous mettre la puce à l'oreille, c'est que vous avez vu en cours (ou verrez en cours) le critère dit « de Leibniz » dans lequel une troisième condition est ajoutée. Ce serait surprenant qu'elle ne serve à rien !
Vous pouvez chercher un contre-exemple, mais sans indications ce sera assez difficile. Gardons ça pour plus tard ! On y reviendra en faisant l'exercice à propos du critère de Leibniz.

1g La somme de deux séries convergentes est-elle convergente ?

OUI ! La raison en est simple : chaque somme partielle de $(u_n + v_n)$ est somme de la somme partielle de même rang de u_n et de la somme partielle de même rang de v_n. La convergence des deux suites de sommes partielles de (u_n) et de (v_n) entraîne alors aussitôt celle de la suite des sommes partielles de $(u_n + v_n)$.

1h La somme de deux séries divergentes est-elle divergente ?

NON ! De même que la somme de deux suites divergentes peut être convergente. Sauriez-vous donner un exemple ?

Indication : viser la série nulle comme valeur de $u_n + v_n$.

Autrement dit, prendre u_n et v_n opposées. Pour recycler une question traitée plus haut, on peut prendre $u_n = 2^n$ et $v_n = -2^n$.

On nous informe que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2a Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$.

Facile, celui-là : chaque terme est multiplié par 3, donc chaque somme partielle est multipliée par 3, donc la limite de la suite des sommes partielles est multipliée par 3. Et le résultat est donc le triple de la valeur rappelée en introduction : c'est $\frac{\pi^2}{2}$.

2b Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$.

Indication : poser $m = n + 1$.

Avec cette indication, on voit qu'on a à calculer $\displaystyle\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2}$. Par la pensée, on réécrit n au lieu de m dans cette dernière expression -c'est possible, ce sont des « variables muettes ». Et que voit-on ?

Que la somme à calculer est la même que celle qu'on nous a fournie plus haut, à ceci près que le premier terme manque ; or celui-ci vaut 1. La réponse attendue est donc $\frac{\pi^2}{6} - 1$.

2c Et maintenant, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$.

Mais c'est très facile ! C'est la même idée que le a, à peine camouflée.

Ici chaque terme est multiplié par 1/4 : la réponse est donc le quart de la donnée fournie dans l'en-tête, et c'est donc $\frac{\pi^2}{24}$.

2d Enfin, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

L'astuce est de penser à faire interagir cette série avec celle qui intervient au 2c.

Les choses s'expliquent peut-être mieux en abandonnant les lettres. Au 2c, on a réussi à sommer $1/2^2$, $1/4^2$, $1/6^2$, ... Dans cette nouvelle question, on nous demande de sommer $1/1^2$, $1/3^2$, $1/5^2$, ... La somme des résultats du 2c et du 2d est donc égale à la somme de TOUS les $1/k^2$, et donc à $\frac{\pi^2}{6}$. La réponse au 2d est donc $\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24}$ ce qui fait $\frac{\pi^2}{8}$.

Tiens avant de passer à l'exercice 3, si on rebondissait une seconde sur cette « astuce »du 2d pour revisiter la série harmonique. On va essayer de montrer par l'absurde qu'elle est divergente. Supposons donc qu'elle soit convergente, et notons S sa somme. Que dire de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$? Puis de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$? Comment arriver à un retentissant « c'est absurde » ?

Voyons, sur le modèle du $2c$ la première somme vaut $S/2$. Sur le modèle du $2d$, la deuxième vaut $S - S/2 = S/2$. Pourtant chaque terme de la deuxième est strictement plus grand que le terme de la première de même position dans la somme $1 > 1/2$, $1/3 > 1/4$, $1/5 > 1/6$, etc... La série des inverses des impairs doit avoir une somme strictement plus grande que la série des inverses des pairs. Ce qui contredit l'égalité des deux sommes, à $S/2$.

3a Convergence ou non pour la série des $\dfrac{1}{n2^n}$?

CONVERGENCE ! Chacun des termes est d'une part positif, d'autre part plus petit que $\dfrac{1}{2^n}$. Or cette série (géométrique de raison strictement plus petite que 1 en valeur absolue) est convergente. Prise en sandwiche entre deux séries convergentes, la série proposée est aussi convergente.

3b Convergence ou non pour la série des $\dfrac{1}{n(n+1)}$?

CONVERGENCE ! Encore un sandwiche, encore la série nulle en minoration, et quelle série en majoration ?

Oui, bien sûr, celle des $\dfrac{1}{n^2}$.

3c Convergence ou non pour la série des $\dfrac{\ln n}{n}$?

DIVERGENCE ! Pour la divergence, la minoration par une série dont la somme est $+\infty$ permettra de conclure. Laquelle donc ?

La série harmonique bien sûr... Oh attention ça ne marche pas si bien que ça dans le détail ! Le facteur $\ln n$ n'est pas toujours plus grand que 1. On va quand même s'en tirer, comment ?

En observant qu'il est plus grand que 1 dès que n est plus grand que 3, donc sauf pour un nombre fini de valeurs (ici les deux premières). Or modifier un nombre fini de valeurs à une série n'a aucune incidence sur sa convergence.

3d Convergence ou non pour la série des $\dfrac{\ln n}{n^3}$?

CONVERGENCE ! La méthode du c ne marche pas à l'identique, puisque la série de terme général $1/n^3$ est une série de Riemann convergente. En revanche, une mise en sandwiche entre la série nulle et une majorante convergente n'est pas très difficile à trouver. Quelle majorante ?

Probablement $\dfrac{1}{n^2}$. Pour ce faire on a besoin de vérifier que $\ln n/n$ est majoré par 1. Comment y arriver ?

Le plus efficace est sans doute de préférer majorer $\ln t/t$ pour t variant entre 1 et l'infini. Ce qui se fait très bien en dérivant. Si on est paresseux et qu'on n'aime pas les calculs, on peut dire que $\ln n/n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini (croissance comparée), donc qu'il est plus petit que 1 « à partir d'un certain rang » (sans chercher à déterminer ce rang), donc que la majoration est vraie sauf pour un nombre fini (ici nul mais on fait semblant de ne pas s'en rendre compte) de termes.

4a Convergence ou divergence de la série de terme général $\frac{n}{2^n}$?

Dans un premier temps, on s'assure qu'aucun des termes de la suite n'est nul - sans cela, l'application du critère de d'Alembert causera une division par zéro et la destruction de l'univers. Et c'est particulièrement important d'être concentré ici, non seulement parce que nous ne voulons pas détruire l'univers, mais parce que le danger se produit réellement dans certains exercices de fin du semestre, au moment de calculer des rayons de convergence de séries entières. Mais n'anticipons pas.
Une fois cette observation faite, on calcule pour chaque n entier (ici supérieur ou égal à 1), le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Ici, ça fait :

$$\frac{n+1}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n} = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}$$

L'étape suivante, TROP SOUVENT OUBLIÉE SUR LES COPIES, est de calculer la limite de ce $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ quand n tend vers l'infini. Ici cette limite est $1/2$.
On constate alors que la valeur absolue de cette limite est STRICTEMENT inférieure à 1. Le critère de d'Alembert conclut à la convergence.

4b Convergence ou divergence pour la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n!}$?

CONVERGENCE, d'Alembert marchant sans aucune difficulté, exécutez.

* On observe qu'aucun des u_n n'est nul ;
* On explicite le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, ici :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{(-1)^n} = -\frac{1}{n+1}.$$

Que faut-il NE PAS OUBLIER DE FAIRE ?

On calcule la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Ici c'est évident, elle vaut 0.
Comme $|0| = 0 < 1$, on conclut à la convergence.

4c Convergence ou divergence pour la série de terme général $\dfrac{\ln n}{n!}$?

CONVERGENCE, avec un tout petit peu plus de travail.
* On observe que u_1 est nul : le calcul de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ n'est valable qu'à partir de $n = 2$, mais ça n'a pas d'importance puisque la convergence d'une série n'est pas modifiée par la modification d'un nombre fini de termes.
* On explicite :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)!}\frac{n!}{\ln n} = \frac{\ln(n+1)}{\ln n}\frac{1}{n+1}$$

et on recherche sa limite

La limite de $\dfrac{1}{n+1}$ est sans difficulté, celle du quotient $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}$ vaut 1, mais ce n'est pas tout à fait évident, c'est une question « classique » qui réapparaît régulièrement d'un exercice à l'autre. Savez-vous faire ?

Oui, vous savez. Face à une formule un peu compliquée, vous avez bien sûr les deux réflexes de l'attaquer au cœur et de mettre « le gros » en facteur. Ici « le gros », on le trouve en haut et c'est n, qui est très gros par rapport à 1. Exécution ?

$$(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\ln\left[n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln n}$$

Et on constate avec stupéfaction (limitée quand même par la fréquence de la réapparition de l'exercice) qu'il n'y a plus de forme indéterminée : le quotient un peu compliqué est de la forme « zéro divisé par infini » et tend sans difficulté vers zéro.
On conclut que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers zéro, et donc que la série converge.

4d Convergence ou divergence pour la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$?

D'ALEMBERT ÉCHOUE ! Ici en effet $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ vaut $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2$.
Attention à ne pas faire une gaffe ici ! Le réel que nous venons d'écrire est strictement plus petit que 1, ce qui pourrait mener des cervelles de moineaux à conclure à la convergence. Oh la boulette ! Avant de comparer la quantité à 1, il ne faut PAS OUBLIER DE PASSER À LA LIMITE. Or la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ ici est 1 (et n'est pas 1 par valeurs supérieures, ce qui permettrait de s'en tirer...). Est De fait, il est hors de question d'espérer obtenir quelque chose de d'Alembert pour une série de Riemann ou pour une série qui pourrait être minorée par une

série de Riemann. Ce n'était même pas la peine d'essayer ! (Et oui, nous savons bien sûr que cette série converge, mais qu'on doit utiliser d'autres méthodes pour le prouver).

5a Convergence ou divergence de la série de terme général $\frac{n}{2^n}$? (Mais cette fois en utilisant le critère de Cauchy)

Les choses n'ont pas changé depuis la dernière fois qu'on a étudié cette série : elle est toujours CONVERGENTE.
Pour le montrer, on a à étudier $|u_n|^{1/n}$, qui vaut ici :

$$|u_n|^{1/n} = \frac{n^{1/n}}{2}.$$

L'étape suivante, qui ne doit SURTOUT PAS ÊTRE OUBLIÉE est de passer à la limite dans cette expression. Essayez.

Bien sûr la difficulté est dans le $n^{1/n}$. C'est une forme indéterminée plus ou moins camouflée, et il ne faut pas prétendre que « c'est évident ». Quand on rencontre ce genre de calcul de limite avec une variable en exposant, il y a un réflexe attendu.

Oui, vous l'avez : c'est passer à une forme exponentielle.

$$n^{1/n} = e^{\frac{\ln n}{n}}$$

Dans cette expression, la puissance l'emporte sur le log dans l'exposant, qui tend donc vers 0 puis l'exponentielle tend vers 1.
Finalement la quantité $|u_n|^{1/n}$ tend vers $\frac{1}{2}$. Ce nombre est STRICTEMENT PLUS PETIT que 1. D'où la convergence.

5b Convergence ou divergence de la série de terme général $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$?

Ici, $|u_n|^{1/n}$ est d'expression particulièrement simple, plus simple que u_n : il vaut $1 + \frac{1}{n}$. Cette quantité tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Dans les versions moins élaborées de la règle de Cauchy, on ne peut pas conclure. Mais en fait si, si -comme vous- on est intelligent. Que faire ?

Dans cet exemple, $|u_n|^{1/n}$ tend vers 1 par valeurs SUPÉRIEURES. On peut savoir par cœur que dans ces circonstances, la divergence de la série est garantie. Je recommande personnellement d'en dire un peu plus, car ça oblige à ne pas perdre le sens des ordres de grandeur. Puisque $|u_n|^{1/n}$ tend vers 1 par valeurs supérieures, il est en particulier plus grand que 1 pour n suffisamment grand. En prenant les puissances n, on voit que pour ces n suffisamment grands, $1 \leq |u_n|$. Mais alors on peut en déduire que u_n ne tend pas vers zéro. Ceci entraîne la divergence de la série, et une divergence particulièrement patente.

5c Convergence ou divergence de la série de terme général $\left(\dfrac{1+n}{n^2}\right)^n$?

Encore un facile. Ici aussi l'expression de $|u_n|^{1/n}$ est plus sympathique que celle de u_n puisque $|u_n|^{1/n} = \dfrac{1+n}{n^2}$. Cette quantité tend vers 0, qui est strictement inférieur à 1. Et hop, convergence.

5d Le critère de Cauchy permet-il d'étudier la série de Riemann de terme général $\dfrac{1}{n^2}$?

NON ! Comme pour d'Alembert, il n'y a aucune chance que ça marche pour une série dont l'ordre de grandeur est proche de celui d'une série de Riemann (et en particulier pour une série de Riemann proprement dite !)
Essayons quand même pour voir échouer la tentative :

On écrit :

$$|u_n|^{1/n} = \frac{1}{(n^2)^{1/n}} = e^{-2\frac{\ln n}{n}}$$

Là on N'OUBLIE PAS DE FAIRE QUELQUE CHOSE.

De passer à la limite, bien sûr. Il ne faut surtout pas directement comparer $|u_n|^{1/n}$ à 1. Exécutons donc.
Comme déjà dans le calcul fait au 5a, cette expression tend vers $e^0 = 1$ par « croissance comparée ». Et comme on le sait, quand dans un essai de Cauchy on tombe sur 1 (sans que ce soit par valeurs supérieures), on est bloqué : la méthode n'a donné aucun résultat et était très vraisemblablement inadaptée.

6a Le critère de Leibniz permet-il d'étudier la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2^n}$?
OUI ! On doit faire trois vérifications. Lesquelles ?

On doit vérifier que :
* le signe de u_n alterne, ce qui peut agréablement se formaliser en écrivant $u_n = (-1)^n v_n$: on doit alors vérifier que v_n est de signe strictement positif (bien sûr, au cas par cas, on pourrait adapter en posant $u_n = (-1)^{n+1} v_n$ lorsque ce sont pour les vleurs impaires de n que u_n prend des valeurs positives).
* la suite (v_n) tend vers zéro ;
* la suite (v_n) est décroissante.
Ici les trois sont absolument immédiats !
Notez qu'on pouvait utiliser le critère de Leibniz ici, mais que ça ne veut pas dire que c'est une bonne idée. La série proposée est la série géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$, raison qui est de valeur absolue strictement plus petite que 1.

6b Le critère de Leibniz permet-il d'étudier la série de terme général $\dfrac{1}{n!}$?

NON ! Et de façon violente : le signe ne change absolument pas. C'est donc tout à fait hors sujet. Au juste, comment serait-il judicieux d'étudier cette série ?

Par d'Alembert bien sûr. Ici $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ vaut $\frac{1}{n+1}$ qui tend vers zéro. Hop, convergence assurée.

6c Le critère de Leibniz permet-il d'étudier la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\ln n}$?

OUI ! Les trois conditions sont très facilement vérifiées, l'une parce que la fonction logarithme est strictement positive sur $]1, +\infty[$, la deuxième parce que cette fonction tend vers l'infini en l'infini, la troisième parce que cette fonction est croissante.

6d Leibniz permet-il l'étude de la série de terme général $(-1)^n \dfrac{n}{n+1}$?

NON ! Ici v_n ne tend pas vers zéro mais vers un. Donc Leibniz échoue sévèrement. Comment peut-on faire alors ?

Oui, puisque v_n ne tend pas vers zéro, u_n non plus. Or on sait que les séries convergentes ont un terme général qui tend vers zéro. La série proposée est donc sévèrement divergente.
6 et demi N'oublions pas une question qui restait en suspens : trouver un exemple de série où le signe alterne et dont le terme général tend vers zéro mais qui ne converge pas (cf exercice 1, question f).

Là il faut que je donne quelques indications, et même avec les indications ça ne sera pas très facile. On va fabriquer u_n comme une somme $u_n = v_n + w_n$. Là dedans, Σv_n sera une série qui converge à partir du critère de Leibniz, Σw_n sera une série divergente, mais avec quand même un terme général qui tend vers 0, elle sera divergente « de justesse » - la série de terme général $v_n + w_n$ sera donc divergente. La suite (u_n) tendra bien vers zéro, comme somme de deux suites qui tendent vers zéro ; la difficulté est de faire en sorte que u_n soit bien de la forme $(-1)^n |u_n|$.

Le choix le plus facile est celui de w_n : il faut prendre quelque chose qui diverge « de justesse ».

Donc on va essayer $w_n = \dfrac{1}{n}$, une valeur sûre. Reste à choisir finement v_n.

Rappelons qu'on veut que v_n vérifie les hypothèses de Leibniz, et que $v_n + w_n$

ait encore un signe qui alterne. La série la plus simple vérifiant les hypothèses de Leibniz serait $({}_1)^n\dfrac{1}{n}$ et si on prend celle-là on échoue, mais de peu : le signe de $v_n + w_n$ est alternativement nul et strictement positif. Il faut inventer une petite adaptation de ce projet. En voyez-vous ?

Deux variantes : on peut prendre $v_n = \dfrac{2 \times (-1)^n}{n}$ ou prendre $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Les formules $u_n = \dfrac{2 \times (-1)^2 + 1}{n}$ ou $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ répondent toutes les deux au projet de recherche de contre-exemple qu'on avait entrepris.

7a Comment étudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ à l'aide d'intégrales ?

C'est sans doute plus ou moins une question de cours : c'est une des « séries de Riemann » les plus fréquemment rencontrées. On sait donc à l'avance qu'on va avoir à montrer une convergence, ce qui est bien confortable. On va noter $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$, suite de sommes partielles qui est évidemment croissante (la différence $S_{N+1} - S_N$ vaut $\dfrac{1}{(N+1)^2}$ et est donc positive) ; si on arrive à montrer que la suite (S_N) est majorée, on aura prouvé sa convergence. La majoration de S_N se fait par une méthode très standardisée, facile à comprendre sur un dessin et qui peut paraître un peu miraculeuse sur une version en pur texte.

Pour chaque $n \geq 2$, on va majorer le terme $\dfrac{1}{n^2}$ par une intégrale sur un intevalle approprié, en l'espèce l'intervalle $[n-1, n]$. Notez que, techniquement, j'ai ici été obligé de renoncer à majorer le terme correspondant à $n = 1$ ce qui n'a aucune importance puisque le comportement d'une série « ne dépend pas de ses premiers termes », mais qui ajoute une impression de technicité à quelque chose de déjà un peu technique.

Remarquons donc que pour tout $n \geq 2$ et tout t dans l'intervalle $[n-1, n]$, on dispose de l'inégalité $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$. Ceci parce que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ et *a fortiori* sur $]0, +\infty[$. On intègre cette inégalité entre $n-1$ et n et on écrit :

$$\int_{n-1}^{n} \frac{1}{n^2}\, dt \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^2}\, dt.$$

Le calcul à gauche est stupide : c'est l'intégrale d'une constante. Le calcul à droite serait facile, mais mettons-le de côté pour plus tard. On en est donc à savoir que :

$$\frac{1}{n^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^2}\, dt.$$

On somme maintenant ces inégalités entre 2 et N (et on ajoute 1 pour que S_N apparaisse), ça donne :

$$1+\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2}\leq 1+\sum_{n=2}^{N}\int_{n-1}^{n}\frac{1}{t^2}\,dt$$

qui s'arrange par relation de Chasles :

$$S_N\leq 1+\int_1^N\frac{1}{t^2}\,dt.$$

Le moment est venu de calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^N\frac{1}{t^2}\,dt=\left[-\frac{1}{t}\right]_1^N=1-\frac{1}{N}$ puis de reporter dans l'inégalité :

$$S_N\leq 2-\frac{1}{N}\leq 2.$$

On a enfin majoré S_N (au sens de majoré **par une constante**! Surtout ne croyez **jamais** avoir terminé alors qu'il reste du N dans votre majoration!). La suite des sommes partielles est donc une suite croissante et majorée, donc une suite convergente.

7b Comment étudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln n}$ à l'aide d'intégrales

C'est ce qu'on appelle parfois une « intégrale de Bertrand ». Avant de s'engager, essayons de prédire si on va montrer une convergence ou une divergence. La feuille d'exercices étant bien faite, on peut soupçonner qu'il s'agit d'un exemple de preuve de divergence succédant à un exemple de preuve de convergence, mais c'est un peu léger comme argument. Un argument plus sérieux va s'obtenir en calculant dès à présent intégrale (qui servira en fin de preuve), à savoir (pour tout réel $b>1$) :

$$\int_2^b\frac{1}{t\ln t}\,dt.$$

On observe que la fonction intégrée est de la forme $u'(t)/u(t)$ pour $u(t)=\ln t$ et donc on sait en trouver une primitive :

$$\int_2^b\frac{1}{t\ln t}\,dt=[\ln(\ln t)]_2^b=\ln(\ln b)-\ln(\ln 2).$$

Cette quantité tend vers l'infini quand b tend vers l'infini, ce qui laisse présager qu'on a intérêt à s'engager dans une preuve de **divergence**.

Ce choix étant fait, on observe comme à la question précédente que la fonction $t\mapsto t\ln t$ est décroissante sur $]1,+\infty[$, donc sur tout intervalle inclus dans cette demi-droite. Cette fois on se sert de cette remarque pour **minorer** le terme général de la série, et ce qui sera pertinent pour minorer, c'est le travail sur l'intervalle $[n,n+1]$. Exécutons donc.

Pour tout $n\geq 2$ et tout t dans l'intervalle $[n,n+1]$ on peut écrire la minoration :

$$\frac{1}{t\ln t} \leq \frac{1}{n\ln n}$$
On intègre ensuite cette inégalité entre n et $n+1$:
$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t\ln t}\,dt \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n\ln n}\,dt$$
qu'on calcule à droite mais pas à gauche pour l'instant :
$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t\ln t}\,dt \leq \frac{1}{n\ln n}.$$
On somme ceci pour n variant entre 2 et N, on obtient avec Chasles, et en notant S_N la somme partielle :
$$\int_2^{N+1} \frac{1}{t\ln t}\,dt \leq S_N$$
L'intégrale a été cette fois calculée en préambule on peut donc reporter le résultat du calcul :
$$\ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln 2) \leq S_N$$
Il n'y a plus qu'à faire tendre N vers l'infini : l'expression de gauche tend vers l'infini, donc la somme partielle aussi.

7c Même question pour la série de terme général $\dfrac{1}{e^n}$?

Il est bien clair que c'est un marteau-pilon pour écraser une mouche : il s'agit d'une série géométrique convergente ! Cela étant, ça nous entraîne, ça ne peut pas faire de mal. Ici la fonction appropriée est bien sûr $t \mapsto e^{-t}$ et elle a encore le bon goût d'être décroissante sur $\mathbf{R}$.

On suit donc le même plan qu'au a) : on note S_N la N-ème somme partielle de la série à étudier. Pour tout $n \geq 1$ on majore d'abord pour tout t de l'intervalle $[n-1, n]$:
$$e^{-n} \leq e^{-t}$$
On intègre ceci entre $n-1$ et n :
$$\int_{n-1}^{n} e^{-n}\,dt \leq \int_{n-1}^{n} e^{-t}\,dt$$
On simplifie l'intégrale de constante, on laisse l'autre en suspens pour le moment :
$$e^{-n} \leq \int_{n-1}^{n} e^{-t}\,dt$$
On somme le tout entre 1 et N :
$$S_N \leq \int_0^N e^{-t}\,dt$$

On explicite l'intégrale $\displaystyle\int_0^N e^{-t}\,dt = [-e^{-t}]_0^N = 1 - e^{-N}$ et on majore $1 - e^{-N} \leq 1$. On conclut que pour tout $N \geq 1$, $S_N \leq 1$ et que la suite (S_N) , croissante et majorée, est donc convergente.

7d Même question pour la série de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)}$?

C'est encore le même plan que le a), avec là aussi la nécessité technique de mettre le premier terme de côté. On note encore S_N la N-ème somme partielle. Pour tout $n \geq 2$ on majore d'abord pour tout t de l'intervalle $[n-1, n]$:

$$\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{t(t+1)}$$

On intègre ceci entre $n-1$ et n :

$$\int_{n-1}^{n} \frac{1}{n(n+1)}\,dt \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t(t+1)}\,dt$$

On simplifie l'intégrale de constante, on laisse l'autre en suspens pour le moment :

$$\frac{1}{n(n+1)} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t(t+1)}\,dt$$

On somme le tout entre 2 et N, et on ajoute 1 pour avoir S_N en entier, avec aussi le terme correspondant à $n = 1$:

$$S_N \leq 1 + \int_1^N \frac{1}{t(t+1)}\,dt$$

Pour calculer l'intégrale, on réduit en éléments simples :

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$$

donc :

$$\begin{aligned}\int_1^N \frac{1}{t(t+1)}\,dt = \int_1^N \frac{dt}{t} - \int_1^N \frac{dt}{t+1} &= [\ln t]_1^N - [\ln(t+1)]_1^N \\ &= \ln\left(\frac{N}{N+1}\right) + \ln 2 \leq \ln 2\end{aligned}$$

On a donc majoré la suite croissante (S_N) par le réel fixe $1 + \ln 2$. Ceci démontre que la série proposée converge - ce qu'on avait d'ailleurs déjà prouvé au 3b avec beaucoup moins d'efforts, ainsi va la vie.

8a Étude de la série de terme général $\dfrac{n}{2^n}$

Oups c'est déjà fait au 4a et au 5a, elle converge.

8b Étude de la série de terme général $\dfrac{1}{n\,\ln n\,\ln(\ln n)}$

On va comparer à l'intégrale de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\,\ln t\,\ln(\ln t)}$, sur $]e, +\infty[$. Notons tout de suite que cette fonction est décroissante (son inverse est produit de trois fonctions croissantes à valeurs strictement positives).

On prend modèle sur l'exercice 7b où on a traité une série divergente assez similaire, à base elle aussi de logarithmes.

Une première phase va consister à calculer l'intégrale $\displaystyle\int_3^b \frac{1}{t\ \ln t\ \ln(\ln t)}\, dt$.

Pour ce faire on observe que la fonction intégrée est de la forme $u'(t)/u(t)$ pour $u(t) = \ln(\ln t)$ et donc on sait en trouver une primitive :

$$\int_3^b \frac{1}{t\ \ln t\ \ln(\ln t)}\, dt = [\ln(\ln(\ln t))]_3^b = \ln(\ln(\ln b)) - \ln(\ln(\ln 3)) .$$

Cette quantité tend vers l'infini quand b tend vers l'infini, ce qui laisse présager qu'on a intérêt à s'engager dans une preuve de **divergence**.

Pour tout $n \geq 3$ et tout t dans l'intervalle $[n, n+1]$ on peut écrire la minoration :

$$\frac{1}{t\ \ln t\ \ln(\ln t)} \leq \frac{1}{n\ \ln n\ \ln(\ln n)}$$

On intègre ensuite cette inégalité entre n et $n+1$:

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t\ \ln t\ \ln(\ln t)}\, dt \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n\ \ln n\ \ln(\ln n)}\, dt$$

qu'on calcule à droite mais pas à gauche pour l'instant :

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t\ \ln t\ \ln(\ln t)}\, dt \leq \frac{1}{n\ \ln n\ \ln(\ln n)}.$$

On somme ceci pour n variant entre 3 et N, on obtient avec Chasles, et en notant S_N la somme partielle :

$$\int_3^{N+1} \frac{1}{t\ \ln t\ \ln(\ln t)}\, dt \leq S_N$$

L'intégrale a été cette fois calculée en préambule on peut donc reporter le résultat du calcul :

$$\ln(\ln(\ln(N+1))) - \ln(\ln(\ln 3)) \leq S_N$$

Il n'y a plus qu'à faire tendre N vers l'infini : l'expression de gauche tend vers l'infini, donc la somme partielle aussi.

8c Étude de la série de terme général $(-1)^n n$

Le terme général ne tend pas vers zéro, la série diverge donc, « grossièrement ».

8d Étude de la série de terme général $\dfrac{n+1}{n^3+2n}$

Dans l'esprit de l'exercice 3, je vais écrire une solution à base de majorant convergent. Peut-être en expliquerai-je un peu plus dans le corrigé en direct -

ici on commence par être un peu embarrassé de refuser d'utiliser le langage des comparaisons asymptotiques (équivalents, petits o et tout le tintoin).
On regarde l'ordre de grandeur de u_n. En haut, c'est n qui est « le gros » et, à ce titre, prépondérant. En bas, c'est n^3. Le u_n qui nous est proposé ressemble donc (en un sens très imprécis) à $\dfrac{1}{n^2}$. On va donc espérer parvenir à montrer la convergence de la série, en la majorant assez intelligemment pour donner un sens précis à l'idée informelle qui précède.

Une première simplification possible qui conduit à majorer u_n est de minorer son dénominateur, en perdant un peu d'information mais pas trop. On observe que pour tout $n \geq 1$, $0 < n^3 + 2n \leq n^3$ ce qui permet d'écrire la majoration $u_n \leq \dfrac{n+1}{n^3} = \dfrac{1}{n^2+} + \dfrac{1}{n^3}$.

Au point où on en est on peut appeler le cours si on y connaît toutes les séries de Riemann : on a majoré chaque u_n (qui est par ailleurs minoré par 0) par la somme des termes généraux de deux séries de Riemann convergentes. Prise en sandwiche entre deux séries convergentes, la série de terme général u_n converge donc. Si on ne se souvient pas de $\dfrac{1}{n^3}$, on peut tout simplement la majorer à son tour par $\dfrac{1}{n^2}$ et prendre ainsi en sandwiche u_n entre 0 et $\dfrac{2}{n^2}$: ça marche aussi, avec encore moins d'outils.

8e Étude de la série de terme général $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Vu la forme de la série, le critère de Cauchy semble s'imposer. Il s'impose en effet. Il s'agit d'une série à termes positifs, on regarde donc :

$$(u_n)^{1/n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

C'est un grand classique, celui-là, qui réapparaît régulièrement avec quelques variantes. Le réflexe qu'on devrait avoir est le suivant :

On passe à l'exponentielle, puisque la variable apparaît à la fois en haut et en bas d'un exposant.
On écrit ainsi :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)$$

On se concentre sur le cœur de la formule :

$$\begin{aligned} n\,\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -n\,\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) &= -n\,\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= -n\,\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -1+o(1) \end{aligned}$$

Ce cœur tend donc vers -1, puis $(u_n)^{1/n}$ tend vers e^{-1} qui est un réel strictement compris entre 0 et 1.
Le critère de Cauchy garantit donc la convergence.

8f Étude de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\ln(\ln n)}$

On envisage Leibniz, et ça marche sans aucune difficulté : les signes alternent puisque chaque $\ln(\ln n)$ est positif ce qui garantit que $u_n = (-1)^n |u_n|$ pour tout n ; la suite $(|u_n|)$ est décroissante puisque $\ln(\ln n)$ croît, et tend vers zéro puisque $\ln(\ln n)$ tend vers l'infini.

8g Étude de la série de terme général $\dfrac{n}{(2n+1)!}$

Des points d'exclamation ? C'est probablement d'Alembert !
On observe que les u_n ne sont pas nuls (et sont même strictement positifs) et on examine le quotient :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1) \times (2n+1)!}{n \times (2n+3)!} = \frac{n+1}{n(2n+2)(2n+3)}$$

Une fois ainsi exprimé, ce quotient tend visiblement vers zéro. Le critère de d'Alembert assure la convergence.

8h Étude de la série de terme général $\left(\dfrac{n^2+1}{2n^2}\right)^n$

Le critère de Cauchy semble s'imposer et en effet il s'impose. On constate que $(u_n)^{1/n} = \dfrac{n^2+1}{2n^2}$ puis que cette quantité tend vers $\dfrac{1}{2}$ quand n tend vers l'infini. Par Cauchy, la série converge.

8i Étude de la série de terme général $\dfrac{1}{2n+1}$

On voit que c'est en gros de l'ordre de grandeur de $\dfrac{1}{n}$ et on s'attend donc à ce que ça diverge. On peut le faire de diverses façons, par exemple en comparant à une intégrale. Le plus simple est peut-être de minorer chaque terme par $\dfrac{1}{2n+2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n+1}$ qui est de même nature que la série de terme général $\dfrac{1}{n+1}$. Dans cette dernière on fait le changement de variable $m = n+1$ et apparaît la série harmonique, divergente.

8j Étude de la série de terme général $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Tiens une astuce qu'on n'avait pas encore rencontrée, je crois : ici le mieux est de calculer explicitement

$$S_n = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - 1.$$

Il est alors clair que S_n tend vers l'infini avec n ; la série diverge, donc.

8k Étude de la série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$

Tout s'éclaire si on réécrit u_n en mettant ses deux termes au même dénominateur : $u_n = \dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$.
Dans cette expression, n devrait être prédominant sur $\sqrt{n}$. Techniquement, il suffit d'observer que pour tout entier naturel non nul, $0 < \sqrt{n} \leq n$ donc $0 < n + \sqrt{n} \leq 2n$ et donc $\dfrac{1}{2n}$ minore u_n, quji est donc divergente.

8l Étude de la série de terme général $(-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

Le critère de Leibniz est tentant et il marche. Le caractère alterné de la série découle de la positivité de $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, elle même issue de la croissance de la fonction racine carrée.
Pour la décroissance et la limite de la suite $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, il y a beaucoup de façons de faire. Je suggère l'utilisation du théorème des accroissements finis, tiens, ça nous changera. Voyez-vous comment faire ?

On applique le TAF à la fonction racine sur $[n, n+1]$: il nous fournit un c_n avec $n < c_n < n+1$ pour lequel $u_n = \dfrac{1}{2\sqrt{c_n}}$. Avec ces notations, la suite $(\sqrt{c_n})$ est manifestement croissante (parce que $c_n \leq n+1 \leq c_{n+1}$), donc u_n est décroissante, et elle tend vers l'infini (parce que $n \leq c_n$), donc u_n tend vers zéro.