n n

Exercice 1
On remarque dans un premier temps que si f prend deux fois la même valeur, en deux points x et y distincts, la fonction d proposée ne sera pas une distance puisqu'elle s'annulera sur un couple de points distincts.
Vérifions que cette condition nécessaire est alors suffisante. L'axiome de symétrie des distances est clairement vérifiée pour n'importe quelle f et l'axiome de non-annulation sur les couples de points distincts l'est aussi. Reste l'inégalité triangulaire, et elle coule de source : pour tous x, y et z réels :

$$d(x,z) = |f(x)-f(z)| = |\,(f(x)-f(y))+(f(y)-f(z))\,| \leq |\,|f(x)-f(y)|+|f(y)-f(z)| = d(x,y)+d(y,z).$$

Exercice 2
Pour la première, un carré dont les axes sont les diagonales ; pour la seconde, un disque ; pour la troisième, un carré dont les côtés sont parallèles aux axes.
On peut, si on est économe, se contenter de montrer trois inégalités. Soit x un vecteur de $\mathbf{R}^n$.
* Majoration de la norme $\|\|_1$:
On applique l'identité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$ et $(1, 1, \dots, 1)$ noté a. Elle renvoie la majoration $\|x\|_1 \leq \|a\|_2 \|x\|_2$ (où on peut expliciter la constante $\|a\|_2 = \sqrt{n}$ si on le souhaite).
* Majoration de la norme $\|\|_2$. Pour tout i entre 1 et n, $0 \leq x_i \leq \|x\|_\infty$ donc $x_i^2 \leq \|x\|_\infty^2$. En sommant ceci pour i variant de 1 à n, on obtient $\|x\|_2^2 \leq n\|x\|_\infty^2$. En prenant les racines carrées, on obtient $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$.
* Majoration de la norme $\|\|_\infty$. Le réel $\|x\|_\infty$ est un des termes qui intervient dans la sommation qui définit $\|x\|_1$, et cette somme est formée de nombres tous positifs ou nuls. D'où la majoration $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$.

Exercice 3
Soit x et y deux vecteurs de E. L'inégalité à montrer est équivalente à l'encadrement suivant :

$$-\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|.$$

Dans cet encadrement, l'inégalité de gauche peut s'obtenir en appliquant l'inégalité triangulaire à x et $y-x$ et celle de droite en l'appliquant à $x-y$ et y.

Exercice 4
Non pour la première, car si on choisit $x = (1,0)$ et $\lambda = 4$, on constate que $\|\lambda x\| = 2$ tandis que $|\lambda|\|x\| = 4$.
Oui pour l'autre. La symétrie et la non-annulation sur les couples de points distincts sont immédiats. La propriété moins évidente est l'inégalité triangulaire. Soit x, y et z trois vecteurs. On peut alors écrire :

$$|x_1-z_1| \leq |x_1-y_1|+|y_1-z_1| \leq |x_1-y_1|+2\sqrt{|x_1-y_1|}\sqrt{|y_1-z_1|}+|y_1-z_1| = \left(\sqrt{|x_1-y_1|}+\sqrt{|y_1-z_1|}\right)^2.$$

En prenant les racines carrées des deux extrêmes de cette suite d'inégalités entre nombres positifs, on obtient :

$$\sqrt{|x_1-z_1|} \leq \sqrt{|x_1-y_1|} + \sqrt{|y_1-z_1|}.$$

On fait la même chose sur les deuxièmes composantes des vecteurs et on additionne les deux inégalités obtenues, on constate alors avoir prouvé l'inégalité triangulaire pour x, y et z.

Exercice 5
Le diamètre de la boule proposée est inférieur ou égal à $2r$: soit en effet u et v deux points de celle-ci, on a alors $d(u,v) \leq d(u,x) + d(x,v) \leq r + r = 2r$.
Dans le cas d'un espace normé, il faut mettre à part le cas où il est réduit à $\{0\}$, dans lequel cas le diamètre est nul. Si on n'est pas dans ce cas idiot, soit a un vecteur non nul, puis soit $b = a/\|a\|$ qui est de norme 1. Soit ensuite ρ un réel tel que $0 < \rho < r$. Alors les deux vecteurs $u = x + \rho b$ et $v = x - \rho b$ sont tous deux dans la boule proposée, et leur distance est 2ρ, ce qui prouve que le diamètre de la boule est au moins égal à 2ρ. Ceci étant vrai pour tous les $\rho < r$, on conclut que le diamètre est minoré par $2r$.

Exercice 6
Soit a un point de E et r un réel strictement positif. On va prouver que la boule $B(a, r)$ est convexe. Soit x et y deux points de cette boule et t un réel, en notant $z = (1-t)x + ty$, on a à montrer que z est dans la boule, c'est-à-dire que $\|z - a\| < r$. Exécutons :

$$z - a = (1-t)x + ty - a = (1-t)x + ty - (1-t)a - ta = (1-t)(x-a) + t(y-a)$$

puis

$$\begin{aligned}\|z-a\| = \|(1-t)(x-a) + t(y-a)\| &\leq \|(1-t)(x-a)\| + \|t(y-a)\| \\ &= |1-t|\|x-a\| + |t|\|y-a\| \\ &= (1-t)\|x-a\| + t\|y-a\| < (1-t)r + tr = r.\end{aligned}$$

Pour une boule fermée, on ferait la même chose en remplaçant les deux inégalités strictes figurant ci-dessus par des inégalités larges.

Exercice 7
Soit x et y distincts et choisissons $r = \dfrac{1}{2}d(x, y)$, qui est bien un réel strictement positif par non-annulation de la distance entre points distincts.
S'il existait un point z dans l'intersection des boules $B(x, r)$ et $B(y, r)$, on pourrait écrire :

$$2r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r + r = 2r,$$

ce qui ne serait pas du tout raisonnable. Le point z ne peut donc exister, et les deux boules sont bien disjointes.
Soit maintenant $\{x_0\}$ un singleton et soit U son complémentaire. Pour y_0 élément de U on applique la première partie de l'exercice à x_0 et y_0 ; la boule de centre y_0 et de rayon r ne contient alors pas x_0 et est donc incluse dans U. L'ensemble U est donc ouvert, et le singleton est donc fermé.

Exercice 8
Nous connaissons des exemples de parties d'espaces métriques qui ne sont pas fermées, disons $\mathbf{R}^{+\star}$ en tant que partie de $\mathbf{R}$ pour fixer les idées. Soit A une telle partie. Alors A est la réunion de tous les singletons $\{x_0\}$ pour x_0 élément de A, singletons qui sont fermés par l'exercice précédent. C'est l'exemple demandé. Pour la deuxième partie, on prend les complémentaires.
Une solution alternative est de commencer par la deuxième partie, en considérant les intervalles ouverts $]-1/n, 1/n[$ dans $\mathbf{R}$, qui sont notoirement ouverts. Leur intersection est le singleton $\{0\}$, qui ne l'est bien sûr pas. Pour la première partie, on prend les complémentaires.

Exercice 9
Soit $\overline{B}$ la boule fermée de centre x et de rayon r. On doit montrer que son complémentaire est ouvert. Soit y un point de ce complémentaire, notons R la distance de x à y ; comme $y \notin \overline{B}$, cette distance R est strictement supérieure à r et le réel $R - r$ est donc strictement positif. Soit z un point de la boule centrée en y et de rayon $R - r$. En apploiquant l'inégalité triangulaire regroupée sous la forme :

$$d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, z)$$

on conclut que $r < d(x, z)$ et donc que z est dans le complémentaire de $\overline{B}$. On a ainsi montré que la boule ouverte $B(y, R - r)$ est incluse dans le complémentaire de $\overline{B}$. Puis que ce complémentaire est ouvert.

Exercice 10
L'intérieur de $[0, 1[$ est $]0, 1[$, montrons-le. Tout d'abord $]0, 1[$ est une boule ouverte donc un ouvert, et est inclus dans $[0, 1[$ et donc dans l'intérieur de $]0, 1[$. Soit maintenant U un ouvert contenant 0 ; il contient nécessairement une boule de la forme $]-r, r[$ avec $0 < r$ donc au moins un réel strictement négatif (par exemple $-r/2$) et ne peut être inclus dans $]0, 1[$; la réunion de tous les ouverts contenus dans $]0, 1[$ ne contient donc pas 0.

L'adhérence de $[0,1[$ est $[0,1]$. On peut le faire en passant au complémentaire et en montrant d'abord que l'intérieur de $]-\infty,0[\cup[1,+\infty[$ est $]-\infty<,0[\cup]1,+\infty[$ (c'est à peu près pareil que la preuve du premier paragraphe).
L'intérieur de $]1,+\infty[$ est lui-même, puisqu'il est ouvert.
Son adhérence est $[1,+\infty[$ par les mêmes techniques qu'au deuxième paragraphe.
L'intérieur de $\mathbf{Z}$ est vide. Montrons-le. Supposons qu'il existe un entier n intérieur à $\mathbf{Z}$. Il existerait alors un intervalle $]n-r,n+r[$ entièrement contenu dans $\mathbf{Z}$. Or un tel intervalle contient à l'évidence des points non-entiers (par exemple $n+\mathrm{Min}(1/2,r/2)$ si on veut entrer dans les détails) ce qui est contradictoire.
L'adhérence de $\mathbf{Z}$ est $\mathbf{Z}$ lui-même. En effet le complémentaire de $\mathbf{Z}$ est la réunion des $]n,n+1[$ où n parcourt $\mathbf{Z}$ et est donc ouvert comme réunion d'ouverts.
L'intérieur de $\mathbf{Q}$ est vide. Montrons-le. Supposons qu'il existe un rationnel u intérieur à $\mathbf{Q}$. Il existerait alors un intervalle $]u-r,u+r[$ entièrement contenu dans $\mathbf{Q}$. Or un tel intervalle contient à l'évidence des points irrationnels (par exemple parce que la suite des $u+\sqrt{2}/n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini et qu'on peut donc trouver un $u+\sqrt{2}/n$ inclus dans $]u-r,u+r[$ si on veut entrer dans les détails) ce qui est contradictoire.
L'adhérence de $\mathbf{Q}$ est égale à $\mathbf{R}$. On peut le voir en montrant que son complémentaire est d'intérieur vide par la même technique qu'au paragraphe précédent. Ici pour v irrationnel, on observera par exemple que la suite des représentations décimales par défaut de v est une suite de rationnels qui tend vers v, et on l'utilisera comme on a utilisé ci-dessus la suite des $u+\sqrt{2}/n$.

Exercice 11
Supposons B ouvert. Soit c un point de $A+B$, prenons un point a de A et un point b de B tels que $c=a+b$ puis un réel strictement positif r tel que $B(b,r)\subset B$. On va vérifier que la boule $B(c,r)$ est incluse dans $A+B$. Soit z un point de $B(c,r)$, notons $y=z-a$ de sorte que $z=a+y$. Dans cette écriture $a\in A$; pour ce qui est de y, on remarque que $y-b=(a+y)-(a+b)=z-c$, d'où on déduit que $\|y-b\|=\|z-c\|<r$ donc que $y\in B(b,r)$ donc que $y\in B$. On a donc réussi à écrire z comme somme d'un point de A et d'un point de B. Il est bien élément de $A+B$.

Exercice 12
Corrigé (volontairement) non écrit.

Exercice 13
Notons E l'ensemble proposé. On va montrer qu'il est égal à l'adhérence de A.
Montrons dans un premier temps qu'un point du complémentaire de E est intérieur au complémentaire de A. Soit donc un x dans le complémentaire de E ; ainsi $0<d(x,A)$. On va vérifier que la boule ouverte de centre x et de rayon $d(x,A)$ est incluse dans le commplémentaire de A. Soit z un point de cette boule ; s'il était dans A il existerait un point y de A tel que $d(x,y)<d(x,A)$ (choisir $y=z$) ce qui contredit la définition de $d(x,A)$ comme borne inférieure. Le point z est donc dans le complémentaire de A. On conclut ensuite que la boule considérée y est entièrement, donc que x est intérieur au complémentaire de A.
Montrons dans un second temps qu'un point intérieur au complémentaire de A appartient au complémentaire de E. Soit donc x intérieur au complémentaire de A. On peut donc prendre un ouvert U inclus dans le complémentaire de A et contenant x, puis un réel strictement positif r tel que la boule $B(x,r)$ soit incluse dans U donc dans le complémentaire de A. Soit maintenant un point y de A. Comme ce point n'est pas dans $B(x,r)$ on peut conclure que $r\le d(x,y)$. Le réel r minore donc tous les $d(x,y)$ où y parcourt A, donc minore $d(x,A)$ qui n'est donc pas nul. Ceci prouve que x n'est pas dans E.

Exercice 14
Les deux premières fonctions sont définies sur $\mathbf{R}^2$ et la troisième sur $\mathbf{R}^*\times\mathbf{R}$. Pour les dessins, voir les notes prises en TD.

Exercice 15
Pour les dessins, voir les notes prises en TD.

Exercice 16
Le premier ensemble est ouvert parce qu'image réciproque de $]2,+\infty[$ par la fonction continue $(x,y,z)\mapsto z$. Le troisième est fermé parce qu'image réciproque de $\{0\}$ par la fonction continue $(x,y)\mapsto y-x^2$. Le quatrième est ouvert parce qu'intersection des images réciproques de $\mathbf{R}^{+*}$ par les fonctions continues $(x,y)\mapsto|x|$,

$(x,y) \mapsto |y| - |x-$ et $(x,y) \mapsto 1 - |y|$. Le second donne l'impression de n'être ni ouvert ni fermé, mais ça sera à justifier avec précision !
Pour les premier, deuxième et quatrième ensembles, l'adhérence s'obtiendra en rendant larges les inégalités ; pour le second l'intérieur en les rendant strictes. L'intérieur du troisième ensemble est vide.

Exercice 17
A n'est pas fermé donc pas compact.
B est fermé comme image réciproque de $\mathbf{R}^-$ par l'application $(x,y,z) \mapsto (x^2+y^2+z^2-4)(x^2+y^2+z^2-1)$. Il est borné car dès que $\|(x,y,z)\|_2 > 2$, les deux facteurs dans cette fonction continue sont strictement positifs et on n'est donc plus dans B.
C n'est pas non plus fermé, donc pas compact.

Exercice 18
a) L'inégalité de l'exercice 3 montre que la norme est 1-lipschitzienne.
b) Cette application est continue comme composée de f et de $y \mapsto \|y\|$, elle même continue puisque lipschitzienne.
c) L'application introduite au b) est bornée, comme application continue d'un compact vers $\mathbf{R}$, et on en déduit que f est elle-même bornée.

Exercice 19
Corrigé (volontairement) non écrit.

Exercice 20
Chacune des deux fonctions proposées est définie sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Vu la forme sans surprise des formules qui les définissent, elles sont à l'évidence toutes deux continues sur leur domaine de définition.
Pour la fonction f, elle s'écrit en coordonnées polaires :

$$f(x,y) = \frac{r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta)}{r^2} = r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)$$

d'où la majoration $|f(x,y)| \leq 2r$. On déduit de cette dernière qu'en posant $f(0,0) = 0$ on a construit un prolongement continu.
Pour la fonction g, on commence par se souvenir que pour tout t réel, $|\sin t| \leq |t|$. Cela rappelé, on passe en polaires :

$$|g(x,y)| = \left|\sin\left(\frac{r^3(\cos\theta\sin^2\theta)}{r^2}\right)\right| \leq r$$

et on termine de la même façon.

Exercice 21
a) La fonction est définie et continue hors de l'axe $y = 0$.Prolongeons la en posant $f(x,0) = x^2/2$ hors de son domaine de définition. Soit $(x_0, 0)$ un point de l'axe, faisons tendre (x,y) vers $(x_0,0)$ avec $y \neq 0$. Alors xy tend vers 0 et on peut donc faire le développement limité :

$$f(x,y) = \frac{(xy)^2/2 + o((xy)^2)}{y^2} = x^2/2 + o(x^2)$$

ceci tend bien vers $x_0^2/2$. Il est par ailleurs évident que $f(x,0) = x^2/2$ tend aussi vers $x_0^2/2$ quand x tend vers x_0. Ceci montre la continuité du prolongement au point $(x_0,0)$.
b) La fonction est définie et continue hors de l'axe $x = 0$. Soit y_0 un réel non nul ; examinons le comportement de $f(s,y_0)$ quand s tend vers 0^+. Le numérateur tend vers y_0^2 et le dénominateur vers 0^+, donc le quotient tend vers $+\infty$: aucun prolongement continu n'est envisageable. Pour le point $(0,0)$, dirigeons-nous vers celui-ci en suivant la courbe des (s^3,s). On constate que $f(s^3,s) = s^3 + 1/s$ tend vers $+\infty$ quand s tend vers 0^+ : là non plus pas de prolongement continu envisageable.
c) La fonction est définie et continue hors du point $(0,0)$. Pour le comportement en ce point, un passage en polaires tout à fait analogue à celui du f de l'exercice précédent montre que f admet une limite (qui est 0) quand (x,y) tend vers $(0,0)$. La fonction est donc prolongeable par continuité.

d) Là aussi le seul problème est en $(0,0)$ et se traite bien en polaires après avoir préalablement remarqué que pour tout θ réel, $\sqrt{2} \leq |\sin\theta| + |\cos\theta|$, ce qui permet d'écrire la majoration :

$$0 \leq f(x,y) = \frac{r^2}{r\,(|\sin\theta| + |\cos\theta|)} \leq \frac{r}{\sqrt{2}}$$

dont on déduit que $f(x,y)$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$.
e) L'ensemble de définition est le complémentaire de la courbe d'équation $x = -3^{1/3}|y|^{2/3}$.Les choses se passent ensuite exactement comme au b) ; pour y_0 non nul l'impossibilité de prolonger en $(-3^{1/3}|y_0|^{2/3}, y_0)$ découle du même argument (un numérateur tendant vers un réel non nul et un dénominateur tendant vers l'infini). Au point $(0,0)$ on conclut en suivant la courbe des $(s, s^{3/2})$ avec $0 < s$ et s tendant vers 0^+.
f) Je n'écris volontairement pas les détails formels, qui me semblent trop compliqués vis-à-vis des objectifs de l'année. La fonction est définie hors des axes de coordonnées. Quand on tend vers un point $(x_0, 0)$ avec $x_0 \neq 0$, le $x + y^2$ tend vers une limite finie non nulle tandis que le morceau en sinus oscille entre 0 et 1 ; ceci proscrit tout prolongement par continuité. L'argument est le même en un point $(0, y_0)$ avec $y_0 \neq 0$. Pour ce qui est de la limite en $(0,0)$ on peut majorer le sinus par 1 en valeur absolue et en conclure que $|f(x,y)| \leq |x + y^2| \leq |x| + y^2$. Or cette dernière expression tend clairement vers 0 ; on peut donc prolonger f en une fonction continue en posant $f(0,0) = 0$.

Exercice 22

1) Les fonctions composantes, et plus généralement les formes linéaires (c'est-à-dire les applications linéaires à valeur dans $\mathbf{R}$) sont clairement homogènes de degré 1. Leurs valeurs absolues aussi. Les normes aussi. Leurs puissances d sont homogènes de degré d, ainsi plus généralement (pour d entier) que toute fonction susceptible de s'écrire polynomialement en les variables avec des monômes tous de degré d. Étant donnée une fonction g définie et continue sur l'ensemble des vecteurs unitaires et un réel d, on construit une fonction homogène de degré d en posant pour tout vecteur x non nul (la norme utilisée est la norme euclidienne) :

$$f(x) = \|x\|^d\, g\left(\frac{x}{\|x\|}\right).$$

2) Si d n'est pas nul, seule la fonction nulle est à la fois homogène de degré d et bornée. Soit en effet un vecteur x pour lequel $f(x) \neq 0$, alors f n'est pas bornée sur la demi-droite d'origine 0 passant par x (si d est strictement positif, elle tend vers l'infini quand on tend vers l'infini le long de cette demi-droite, si d est strictement négatif, elle tend vers l'infini quand on tend vers l'origine le long de cette demi-droite).
En revanche, toutes les fonctions homogènes de degré 0 sont bornées. Soit en effet f une telle fonction. Pour tout vecteur x non nul, $f(x) = f\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)$ et l'ensemble des valeurs prises par f sur l'ensemble de départ tout entier est le même que l'ensemble des valeurs prises sur le seul ensemble des vecteurs unitaires. Mais celui-ci est compact et f est continue : son image par f est donc bornée.
3) On a essentiellement fait le travail à la question précédente : pour $d < 0$ le comportement en 0 demi-droite par demi-droite exclut un prolongement possible sauf pour la fonction nulle. Pour $d = 0$ le prolongement sera possible si et seulement si la fonction est constante sur la sphère unité, c'est-à-dire si et seulement si la fonction est constante. Pour $d > 0$ on peut montrer que le prolongement par $f(0,0) = 0$ est continu. Si on note en effet M une borne pour la fonction continue $|f|$ restreinte à la sphère-unité, on remarque que Mr^d est alors une borne sur la boule ouverte centrée en 0 est de rayon r.

Exercice 23

Pour la première f, on observe que pour tout t réel, $f(t,0) = t$. On constate alors que f n'est pas bornée.
Pour la deuxième, on peut majorer le cosinus par 1 puis encadrer $0 \leq f(x,y) \leq e^1$. Elle est donc bornée.
Pour la troisième, on peut dans un premier temps écrire :

$$0 \leq f(x,y) = x^4 e^{-x^2} e^{-y^4} + y^2 e^{-y^4} e^{-x^2} \leq x^4 e^{-x^2} + y^2 e^{-y^4}.$$

On aura gagné si on parvient à borner sur $\mathbf{R}$ les deux fonctions d'une variable réelle $t \mapsto t^4 e^{-t^2}$ et $t \mapsto t^2 e^{-t^4}$.
Or ceci est facile : elles sont toutes deux continues et tendent toutes deux vers 0 quand t tend vers l'infini.