Université Claude Bernard Lyon 1 **Licence Mathématiques et économie**

Analyse pour l'économie 1

Lorenzo Brandolese

1 Intégrales impropres

Les résultats de ce chapitres s'appuient sur quelques propriétés importantes rencontrées en L1:

- Soit $f\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$. une fonction croissante sur $[a,+\infty[$. Alors il existe la limite (finie ou $+\infty$) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. De plus, si la fonction est majorée, alors la limite est nécessairement finie et elle est égale à $\sup_{x\in[a,+\infty[} f(x)$.

- Soit $f\colon [a,b[\to \mathbb{R}$. une fonction croissante sur $[a,b[$. Alors il existe la limite à gauche (finie ou $+\infty$) $\lim_{x\to b-} f(x)$. De plus, si la fonction est majorée, alors la limite est nécessairement finie et elle est égale à $\sup_{x\in[a,b[} f(x)$.

- Une suite de nombre réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (=possède une limite $\ell\in\mathbb{R}$) si et seulement si elle vérifie la condition de Cauchy suivante
$$\forall\epsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N} \text{ tel que } \big(m,n\ge n_0 \ \Rightarrow\ |x_n-x_m|<\epsilon\big).$$

On rappelle que toute fonction $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ continue sur l'intervalle $[a,b]$ possède une primitive F sur $[a,b]$, c'est à dire une fonction dérivable telle que $F'=f$ sur $[a,b]$. De plus, si F et $\widetilde{F}$ sont deux primitives sur $[a,b]$ de la même fonction f, alors elles diffèrent par une constante: $\exists C\in\mathbb{R}$ telle que $\widetilde{F}(x)=F(x)+C$

On peut alors définir l'intégrale de a à b de f de la manière suivante:
$$\int_a^b f := F(b)-F(a),$$
cette expression étant indépendante de la primitive choisie.

Dans le chapitre 6 nous reviendrons plus en détail sur la construction de l'intégrale, en l'interpretant comme une "aire algébrique" de la figure limitée par le graphe de la fonction et l'axe des abscisses. Cette interpretation de l'intégrale nous permettra aussi de démontrer la propriété rappelée ci-dessus sur l'existence de primitives, qui n'est pas immédiate, et qui en général est admise en L1. Aussi, on verra plus tard les propriétés suivantes (pour des fonctions continues f et g):

1. si $f\le g$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f\le\int_a^b g$.
2. $|\int_a^b f|\le\int_a^b|f|$.

Le but de ce chapitre est de généraliser le calcul d'intégrales aux fonction continues définies sur des intervalles non bornées comme $[a,+\infty[$, ou $]-\infty,b]$, ou $\mathbb{R}$. Ou encore à des fonctions continues définies seulement sur des intervalles (semi)-ouverts comme $[a,b[$, ou $]a,b]$, ou encore $]a,b[$. De telles fonctions peuvent a priori être non-bornées.

1.1 Intégrales impropres de type $\int_a^{+\infty}$

On traite seulement le cas des fonctions $f\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$. Le cas des fonctions sur des intervalles de type $]-\infty, b]$ est entièrement analogue.

Définition 1.1. *Soit $f\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur tout intervalle $[a,b]$, avec $b \geq a$.*

On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{\infty} f$ s'il existe finie la limite $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f$. Dans ce cas on pose $\int_a^{\infty} f := \lim_{b\to+\infty}\int_a^{+\infty} f$.

Remarque 1.1. Les notations suivantes sont équivalentes

$$\int_a^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} f(s)\,\mathrm{d}s = \dots$$

La première notation est plus compacte. Les autres sont utiles surtout dans le calcul pratique des intégrales, par exemple lorsqu'on utilise la formule du changement de variables.

Exemple 1.2.

- $\int_a^{\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = e^{-a}$.
- Soit $a > 0$, l'intégrale impropre de Riemann $\int_a^{\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Pour $\alpha > 1$ sa valeur est $\int_a^{+\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t = a^{1-\alpha}/(1-\alpha)$.

Remarque 1.3 (Règle de Chasles)**.** . Soit $f\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f$ converge, et $c > a$, alors l'intégrale impropre $\int_c^{+\infty} f$ converge. De plus

$$\int_a^{+\infty} f = \int_a^c f + \int_c^{+\infty} f.$$

C'est une conséquence immédiate de la règle de Chasles "classique" sur l'intervalle $[a,b]$ et d'un passage à la limite pour $b \to +\infty$.

Théorème 1.1 (Critères de comparaison. Critère des équivalents)**.** *Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur tout intervalle $[a,b]$, avec $b \geq a$.*

- *Si $0 \leq f \leq g$ sur $[a+\infty[$ et $\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge et $\int_a^{+\infty} f \leq \int_a^{+\infty} g$.*
- *Si $0 \leq f \leq g$ sur $[a+\infty[$ et $\int_a^{+\infty} f$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g$ diverge.*
- *Si $f, g \geq 0$ sur $[a,+\infty[$ et si $f(x) \sim g(x)$ pour $x \to +\infty$, alors les intégrales impropres $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ sont de même nature.*

Dém. Posons $F(x) = \int_a^x f$ et $G(x) = \int_a^x g$. On a

$$F(x) \leq G(x).$$

De plus F et G sont croissantes sur l'intervalle $[a,+\infty[$ et

$$\forall x \in [a,\infty[, \quad G(x) \leq \sup G = \lim_{x\to+\infty} G(x) = \int_a^{+\infty} g.$$

Or, si $\int_a^{+\infty} g$ converge, alors F est majorée par le nombre réel $\int_a^{+\infty} g$. Mais alors la limite $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ existe et

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \sup_{x\in[a,+\infty[} F(x) \le \sup_{x\in[a,+\infty[} G(x) = \int_a^{\infty} g.$$

Ceci prouve en particulier que l'intégrale impropre de f sur $[a,+\infty[$ converge. Le même argument prouve que si l'intégrale impropre de f sur $[a,+\infty[$ diverge, alors l'intégrale impropre de g sur $[a,+\infty[$ doit diverger aussi.

Pour la troisième affirmation, l'hypothèse implique que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un intervalle $[a',+\infty[$ (avec $a' \ge a$ dépendent de ϵ) tel que

$$f(x)(1-\epsilon) \le g(x) \le (1+\epsilon)f(x).$$

(En effet, la condition d'équivalent s'écrit $g(x) = f(x)(1+\varepsilon(x))$, avec $\lim_{x\to+\infty}\varepsilon(x) = 0$). Il suffit alors d'appliquer, sur l'intervalle $[a',+\infty[$ les deux premières affirmations et conclure avec la règle de Chasles. □

Exemple 1.4. Application (critère de Riemann) : si $f \ge 0$ est continue sur $[a,+\infty[$ et $f(x) \sim x^{-\alpha}$ pour $x \to +\infty$, alors l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Intégrales impropres absolument convergentes. Rappelons tout d'abord que le critère de Cauchy suivant d'existence de la limite en $+\infty$ d'une fonction définie réelle F définie sur un intervalle $[a,+\infty[$.

$$\exists \lim_{x\to+\infty} F(x) \in \mathbb{R} \iff \forall\epsilon>0,\ \exists M>0 \text{ tel que } \Big(x,x' > M \ \Rightarrow\ |F(x')-F(x)| < \epsilon\Big). \tag{C}$$

Dém. Pour l'implication "$\Leftarrow$", considérons une suite $x_n \to +\infty$. Soit $\epsilon > 0$ Il existe n_0 tel que, si $n, m \ge n_0$ alors $x_n \ge M$ et $x_m \ge M$ et donc $|F(x_n) - F(x_m)| < \epsilon$. Mais alors la suite $F(x_n)$ est de Cauchy et donc (d'après la complétude de $\mathbb{R}$) elle converge vers un réel ℓ.

Mais,

$$|F(x) - \ell| \le |F(x) - F(x_{n_0})| + |F(x_{n_0}) - \ell|$$

et, si $x \ge M$, les deux termes sont inférieurs à ϵ. Par définition de limite, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ell$.

L'implication "$\Rightarrow$" est juste une application de l'inégalité triangulaire $|F(x')-F(x)| \le |F(x')-\ell| + |\ell - F(x)|$. □

Définition 1.2. *On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f$ est absolument convergente si $\int_a^{\infty} |f|$ est convergente.*

Théorème 1.2. *Soit f une fonction continue sur tout intervalle $[a,b]$, avec $b \ge a$. Si $\int_a^{+\infty} |f|$ est convergente alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.*

Dém. Rappelons que si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ alors $|f|$ l'est aussi et $|\int_a^b f| \le \int_a^b |f|$. Posons, pour $x \ge a$,

$$F(x) = \int_a^x f, \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_a^x |f|.$$

On a, pour $x \ge x' \ge a$:

$$|F(x) - F(x')| = \left|\int_{x'}^x f\right| \le \int_{x'}^x |f| = |G(x) - G(x')|.$$

Par l'hypothèse $\exists \lim_{x\to+\infty} G(x) = \int_a^{+\infty} g \in \mathbb{R}$. Donc G vérifie la condition de Cauchy (C) et par conséquent F aussi. Mais alors $\exists \lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_a^{+\infty} f \in \mathbb{R}$. $\square$

1.2 Intégrales impropres de fonctions non bornées sur des intervalles finies

Pour les fonctions $f\colon]a,b] \to \mathbb{R}$ continues sur tout intervalle $[\alpha,b]$ avec $a < \alpha < b$, on peut définir l'intégrale impropre

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\alpha\to a+} \int_\alpha^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

à condition que cette limite existe finie. On dispose de critères de comparaisons, des équivalents, de convergence absolue analogues à ceux vu dans la section précédente.

Exemple 1.5. Soit $a > 0$. L'intégrale impropre de Riemann $\int_0^a t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

1.3 Intégrales impropres en plusieurs points

Si $f\colon]a,+\infty[\to \mathbb{R}$ est continue sur tout intervalle de type $[\alpha,b]$ avec $a < \alpha < b$, alors l'intégrale (doublement) impropre

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

converge si et seulement si les deux intégrales impropres $\int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_A^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Ici $A > a$ est arbitraire. On pose alors

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t + \int_A^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 1.6. Soit $\alpha > 0$ L'intégrale doublement impropre $\int_0^{+\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$ (impropre au voisinage de 0 et aussi au voisinage de $+\infty$) est toujours divergente. En effet les conditions de convergence sur α illustrées dans les exemples 1.4 et 1.5 ne sont pas compatibles.

2 Séries numériques

`À compléter`

3 Suites et séries de fonctions

À compléter

4 Séries entières

À compléter

5 Topologie dans $\mathbb{R}^n$

Définition 5.1 (Normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$)**.** *Pour* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *on pose*

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|, \qquad \|x\|_2 := \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\Big)^{1/2}, \qquad \|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

L'application $\|\cdot\|_2 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ *s'appelle* norme euclidienne. *Les applications* $\|\cdot\|_1 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ *et* $\|\cdot\|_\infty \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ *s'appellent, respectivement,* norme-1 *et* norme du sup (ou norme infinie).

Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$,

$$\|(1,2,3)\|_1 = 6, \qquad \|(1,2,3)\|_2 = \sqrt{14}, \qquad \|(1,2,3)\|_\infty = 3.$$

Définition 5.2 (Norme sur $\mathbb{R}^n$)**.** *Une norme sur* $\mathbb{R}^n$ *est une application* $\|\cdot\| \colon E \to \mathbb{R}^+$ *telle que, pour tout* $x, y \in E$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *on a:*

j) $\|x\| = 0 \iff x = 0_E$,

jj) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ *(homogénéité de la norme).*

jjj) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. *(Inégalité triangulaire).*

.

La proposition suivante affirme que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont bien des normes au sens de la définition précédente:

Proposition 5.1. *Les trois applications applications* $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ *et* $\|\cdot\|_\infty$ *vérifient les axiomes j), jj) et jjj). des normes*

Dém. La seule propriété délicate à démontrer est l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne. Les autres propriétés sont faciles et laissées au lecteur.

Rappelons que le *produit scalaire* entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est défini par

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Observons que l'on a

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Pour tout $x = (x_1, \dots x_n)$ et $y = (y_1, \dots y_n)$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ on a

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2 \ \|y\|_2. \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)}$$

Pour la démonstration de cette inégalité nous renvoyons au cours d'algèbre linéaire. Notons que les autres normes sur $\mathbb{R}^n$ ne vérifient aucune relation de ce type avec le produit scalaire.

Nous pouvons maintenant démontrer l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne: observons d'abord que

$$\langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle.$$

L'égalité ci-dessus se réécrit

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique alors

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \ \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

et l'inégalité triangulaire $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ en découle, en prenant terme-à-terme la racine carrée dans la dernière inégalité. □

Exercice 5.1. Construire un exemple d'une nouvelle norme sur $\mathbb{R}^2$, distincte des trois normes précédentes.

Exercice 5.2. Démontrer que si $\|\cdot\| \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ est une norme, alors

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \colon \qquad \Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x - y\|. \tag{5.1}$$

Théorème 5.2 (Toutes les normes de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes)**.** *Si $\|\cdot\|$ et $\|\!|\cdot|\!\|$ sont deux normes sur $\mathbb{R}^n$, alors elles sont équivalentes, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes $A, B > 0$ telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad A\|x\| \leq \|\!|x|\!\| \leq B\|x\|.$$

Dém. Admis. Voir le cours de Topologie et théorie de la mesure de L3. □

Exercice 5.3. Expliciter les valeurs des constantes A et B dans les cas de la norme euclidienne et de la norme $\|\cdot\|_1$. Même question pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Cela permet de voir que les trois normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalente, sans faire appel au théorème.

Mesurer les distances entre deux points de $\mathbb{R}^n$. Dans le cas de la dimension 1, la fonction "valeur absolue", est l'exemple fondamental de norme sur $\mathbb{R}$. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la quantité $|\alpha - \beta|$ exprime la distance, sur la droite réelle, entre les points α et β. En dimension supérieure, si $x, y \in \mathbb{R}^n$, l'expression $\|x - y\|$ est une manière d'exprimer la distance entre les points x et y. Comme plusieurs normes sont possible, il y a plusieurs manières de mesurer les distances.

Par exemple: si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$d_2(x, y) := \|x - y\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\Big)^{1/2}$$

est la *distance euclidienne* entre x et y. Elle exprime la longueur du segment entre x et y. (C'est une application du théorème de Pythagore).

On définit de la même manière,

$$d_1(x,y) := \|x-y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \qquad d_\infty(x,y) := \|x-y\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|.$$

La distance d_1 est appelée parfois la “distance du chauffeur de taxi”.

Définition 5.3 (Boules)**.** *Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ On note*

1. *$B_{\|\cdot\|}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x-y\| < r\}$ (boule ouverte de centre x et rayon r).*
2. *$\overline{B}_{\|\cdot\|}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x-y\| \leq r\}$ (boule fermée de centre x et rayon r).*

Les notations $B(x,r)$ et $\overline{B}(x,r)$ désignent les boules construite à l'aide de la norme euclidienne.

Exercice 5.4. Dessiner les boules centrées à l'origine et de rayon 1 pour les trois normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Définition 5.4.

1. *Un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une partie $U \subset \mathbb{R}^n$ telle que, quel que soit $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U$.*
2. *Une fermé de $\mathbb{R}^n$ est une partie $F \subset \mathbb{R}^n$ tel que l'ensemble complémentaire $U := \mathbb{R}^n \backslash U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Remarque 5.5.

- L'ensemble vide $\emptyset$ et l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier sont toujours *simultanément ouverts et fermés* dans $\mathbb{R}^n$.
- Dans $\mathbb{R}$ les intervalles de type $]a,b[$ sont des parties ouvertes. Les intervalles de la forme $]-\infty,a[$ et $]b,+\infty[$ sont aussi des parties ouvertes, comme on le vérifie l'aide de la définition.
- Les intervalles de type $[a,b]$ sont des parties fermées dans $\mathbb{R}$, au sens ci-dessus. En effet, le complémentaire de cet intervalle est la réunion $]-\infty,a[\cup]b,+\infty[$, qui est un ensemble ouvert (la réunion d'ouverts étant un ouvert, voir la proposition ci-dessus).
- L'intervalle $[a,b[$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est ni ouverte, ni fermée.

Proposition 5.3. *Si $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Les boules $B(x,r)$ sont des parties ouvertes et $\overline{B}(x,r)$ sont bien des parties fermées dans $\mathbb{R}^n$.*

Dém. Soit y un point arbitraire tel que $y \in B(x,r)$. Posons $r' = r - d(x,y)$. On a bien $r' > 0$. Vérifions que que si $z \in B(y,r')$ alors $z \in B(x,r)$: en effet, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + r' = r$. Mais alors $B(y,r') \subset B(x,r)$. Cela prouve que $B(x,r)$ est un ouvert.

On montre de manière semblable que l'ensemble $\{y \in \mathbb{R}^n : d(x,r) > r\}$ est un ouvert de X. Par passage au complémentaire, il en découle que $\overline{B}(x,r)$ est bien une partie fermée de $\mathbb{R}^n$. □

Proposition 5.4.

- *La réunion (finie ou infinie) d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'intersection* finie *d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

- *L'intersection (finie ou infinie) de fermés de $\mathbb{R}^n$ est fermée dans $\mathbb{R}^n$. La réunion finie de fermée de $\mathbb{R}^n$ est fermée dans $\mathbb{R}^n$. est une partie fermée.*

Dém. Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts (l'ensemble d'indices I pouvant être fini ou infini) et $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$, alors il existe au moins un indice $i \in I$ tel que $x \in U_i$ et donc il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U_i$. Mais alors $B(x, r)$ est contenue dans $\bigcup_{i\in I} U_i$ et cet ensemble est ouvert.

Si U_1 et U_2 sont ouverts et $x_\in U_1 \cap U_2$, alors il existe $r_1, r_2 > 0$ tels que les boules centrées en x de rayon r_1 et r_2 sont contenues respectivement dans U_1 et dans U_2. Posons $r = \min\{r_1, r_2\}$. Alors $B(x, r) \subset U_1 \cap U_2$ ce qui montre que $U_1 \cap U_2$ est ouvert. Cet argumement se généralise immédiatement à une intersection finie $U_1 \cap \ldots \cap U_n$.

Les autres affirmations se démontrent par passage au complémentaire. □

Définition 5.5 (Intérieur et adhérence)**.** *Si $A \subset \mathbb{R}^n$, l'*intérieur *de A, noté $\overset{\circ}{A}$ est la réunion de tous les ouverts de $\mathbb{R}^n$ contenus dans A. L'*adhérence *de A, notée $\overline{A}$, est l'intersection de toutes les parties fermées de $\mathbb{R}^n$ contenant A.*

Exemple 5.6. Dans l'espace métrique $\mathbb{R}$, muni de la distance usuelle, si $A = [a, b[$, On a $\overset{\circ}{A} =]a, b[$ et $\overline{A} = [a, b]$.

Remarque 5.7. Si A est une partie d'un espace métrique on a par définition $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$. De plus $\overset{\circ}{A}$ est ouvert et c'est le plus grand ouvert contenu dans A. D'autre part, $\overline{A}$ est fermé, est c'est le plus petit fermé contenant A.

Un ensemble sera alors ouvert si et seulement si il coïncide avec son intérieur et férmé si et seulement s'il coïncide avec son adhérence.

Définition 5.6 (voisinage)**.** *Soit x un point d'un espace métrique X. Tout ensemble A tel que $x \in \overset{\circ}{A}$ s'appelle* voisinage *de x. On dit qu'une propriété* est satisfaite au voisinage de *x si elle est vérifiée au moins dans une boule contenant x.*

Exemple 5.8. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = 1/x$ pour $x \neq 0$ est *bornée au voisinage de* 2. Elle n'est pas bornée au voisinage de 0. La fonction $g(x) = x - 1$ est ≥ 0 au voisinage de $x = 5/3$. Mais elle n'est pas ≥ 0 au voisinage de $x = 1$.

Définition 5.7 (Partie bornée)**.** *Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite* bornée *s'il existe $r > 0$ telle que pour tout $x \in A$ on a $\|x\|_2 < r$.*

En vertu du théorème, 5.2, rien ne change dans la définition précédente, si au lieu de la norme euclidienne on utilise une autre norme (le choix d'une autre norme changerait juste la valeur de r à considérer, ce qui n'a pas d'importance).

Pour simplifier le notations, nous indiquerons désormais simplement par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. Mais en réalité, dans toutes les définitions de ce chapitre, le choix précis de la norme ne sera pas important.

5.1 Suites

Une suite de $\mathbb{R}^n$ est une application $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Elle est notée généralement $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ou simplement (x_k).

Une sous-suite (ou suite extraite) de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(x_{\varphi(k)})_{l\in\mathbb{N}}$, où $(k_l)_{l\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels strictement croissante: $0 \le k_1 < k_2 < k_3 \ldots$. Les sous-suites de (x_k) peuvent aussi se noter $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, où $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une "extraction", c'est-à-dire une fonction strictement croissante à valeurs naturels. On passe d'une notation à l'autre en posant $\varphi(l) = k_l$.

Définition 5.8. *Soit (x_k) une suite de $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On dit que la suite (x_k) converge vers x, et on écrit $x_n \to x$ ou encore $\lim_{k\to+\infty} x_k = x$ si, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \ge k_0$ on a $\|x_k - x\| < \epsilon$). Si la suite ne converge vers aucun point, on dit qu'elle* diverge.

Dans le cas particulier $n = 1$ on retrouve la définition usuelle de convergence d'une suite réelle. Dans le cas général on voit que

$$x_k \to x \iff \|x_k - x\| \to 0.$$

Proposition 5.5 (Propriétés principales des suites)**.**

- *Si (x_k) est une suite d'un espace métrique et $x_k \to x$ et $x_k \to y$, alors $x = y$. (Unicité de la limite).*
- *Toute suite convergente est bornée.*
- *Si $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ alors toute suite extraite $(x_{\varphi(k)})$ vérifie $\lim_{k\to\infty} x_{\varphi(k)} = x$.*

Dém. À compléter. □

En particulier, si on peut extraire d'une même suite deux sous-suites ayant deux limites différentes, la suite de départ est nécessairement divergente.

Proposition 5.6. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On a $x \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite $(x_k) \subset A$ telle que $x_k \to A$.*

En particulier, un ensemble A est fermé si et seulement si:

$$\forall\, (x_k) \subset A \text{ telle que } x_k \to x \text{ on a } x \in A.$$

Dém. Supposons $x \in \overline{A}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on peut trouver $x_k \in B(x, \frac{1}{k}) \cap A$. En effet, sinon, un aurait $B(x, \frac{1}{k}) \cap A = \emptyset$ et donc $A \subset B(x, \frac{1}{k})^c$; mais alors $\overline{A} \subset B(x, \frac{1}{k})^c$ (puisque cet ensemble est un fermé contenant A). C'est absurde puisque $x \in \overline{A}$ et $x \notin B(x, \frac{1}{k})^c$. On a $0 \le d(x_k, x) \le \frac{1}{k}$ et donc $x_k \to x$ par le théorème des gendarmes ; de plus la suite (x_k) est bien contenues dans A.

Réciproquement, soit $(x_k) \subset A$ et $x_n \to x$. Si, par contradiction, $x \notin \overline{A}$, alors $x \in (\overline{A})^c$, qui est ouvert. On trouve alors $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset (\overline{A})^c$. Mais $x_n \to x$ et donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(x_k)_{k\ge k_0} \subset B(x, r) \subset (\overline{A})^c \subset A^c$. Cela contredit le fait que $(x_k) \subset A$. □

Proposition 5.7 (Suites dans $\mathbb{R}^n$)**.** *Une suite (x_k) dans $\mathbb{R}^n$ converge vers $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si elle converge* composante par composante. *Autrement dit, si $x = (x^1, \ldots, x^n)$ est le vecteur des composantes de x et $x_k = (x_k^1, \ldots x_k^n)$ est le vecteur des composantes de x_k, on a:*
$x_k \to x$ si et seulement si, pour $i = 1, \ldots, d$ on a $x_k^i \to x^i$ dans $\mathbb{R}$.

Dém. À compléter. □

5.2 Fonctions scalaires e vectorielles

Une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite *fonction vectorielle de n variables réelles*. Dans le cas $m = 1$ on appelle f aussi *fonction scalaire (ou numérique) de n variables réelles*.

Ces fonctions, bien souvent, ne sont pas bien définies sur $\mathbb{R}^n$ tout entier, mais seulement sur un ensemble de définition plus petit $D \subset \mathbb{R}^n$. L'ensemble D ne sera pas toujours explicité, dans ces notes ou dans les exercices: dans ce cas il est à construire à partir de l'expression de la fonction. Par exemple, la fonction de deux variables $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ est une fonction scalaire $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dont l'ensemble de définition est $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon (x, y) \neq (0, 0)\}$.

Si $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application vectorielle on lui associe m applications scalaires $f_i\colon D \to \mathbb{R}$, où $i = 1, \dots m$. Par définition,

$$\forall x \in D, \quad f_i(x) := f(x)_i \text{ (= la } i\text{-ème composante du vecteur } f(x) \in \mathbb{R}^m\text{)}$$

On appelle les fonctions f_i les *composantes de f*. On note alors $f = (f_1, \dots, f_m)$.

Représentations graphiques des fonctions Le graphe d'une application $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est l'ensemble

$$G_f = \{(x, y)\colon x \in D, y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

Dans le cas particulier $n = m = 1$, G_f est le tracé d'une courbe dans le plan.

Dans le cas particulier $n = 2$, $m = 1$ (le cas des fonctions scalaires de deux variables), on a $G_f \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ et dans ce cas le graphe de f se représente par une surface dans l'espace : il s'agit de la surface formées par les points de coordonnées (x, y, z), où $z = f(x, y)$.

Une autre manière de visualiser les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est d'en représenter ses lignes de niveau: Pour les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et $k \in \mathbb{R}$, on appelle *ligne de niveau* k l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon f(x, y) = k\}$. Selon les valeurs de k cet ensemble pourra être vide, mais représente souvent une courbe dans le plan. Comme sur une carte topographique, en traçant un nombre suffisant de lignes de niveau on parvient à se représenter la fonctions sans faire appel à des graphiques en 3D. Si $n \geq 3$ et $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la généralisation de cette notion est celui de *surface de niveau* : $\{x \in \mathbb{R}^n\colon f(x) = k\}$.

5.3 Limites de fonctions

5.3.1 Limite en en point de l'ensemble de définition

Définition 5.9. *Soit $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Soit $x_0 \in \overline{D}$ (l'adhérence de l'ensemble de définition de f). On dit que $f(x)$ tend vers y_0 pour $x \to x_0$ dans D, et on écrit*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) = y_0$$

(ou, plus simplement, $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ lorsque $D = \mathbb{R}^n$ ou $D = \mathbb{R}^n \backslash \{x_0\}$), si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que:

$$\forall x \in D\backslash\{x_0\}, \text{ tel que } \|x - x_0\| < \delta \quad \text{on a } \|f(x) - y_0\| < \epsilon.$$

Noter que, dans cette définition, la valeur de f au point x_0 ne joue aucun rôle.

Proposition 5.8 (Limites de fonctions et suites)**.** *Soit $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. On a*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D}} f(x) = y_0 \iff \forall\,(x_k) \subset D\backslash\{x_0\} \text{ telle que } x_k \to x_0, \text{ on a } f(x_k) \to y_0.$$

Dém. Supposons $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D}} f(x) = y_0$. Soit $x_k \to x_0$. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in D\backslash\{x_0\}$ et $\|x_k - x\| < \delta$ alors $\|f(x_k) - y_0\| < \epsilon$. Mais $x_k \to x$ et donc à partir d'un certain rang k_0, $d(x_k, x_0) < \delta$ et la conclusion précédente s'applique, ce qui implique $f(x_k) \to f(x_0)$.

Réciproquement, par contraposée, si on n'a pas $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ on trouve $x \in D\backslash\{x_0\}$ tel que $0 < \|x - x_0\| < \delta$ et $\|f(x) - y_0\| \geq \epsilon$. En appliquant ceci avec $\delta = 1/k$, $k = 1, 2, \dots$ on construit une suite $(x_k) \subset D\backslash\{x_0\}$ telle que la suite $f(x_k)$ ne converge pas vers y_0. □

Remarque 5.9. La proposition précédente est utilisée souvent pour démontrer la *non-existence* de la limite. Par exemple, soit $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Démontrons que la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas. Pour cela, cherchons deux suites $(\alpha_k, \beta_k) \to (0,0)$ et $(\alpha'_k, \beta'_k) \to (0,0)$, telles que $f(\alpha_k, \beta_k) \to \ell$ et $f(\alpha'_k, \beta'_k) \to \ell'$ et $\ell \neq \ell'$. (Par exemple, $(\alpha_k, \beta_k) = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ donne $\ell = \frac{1}{2}$ et $(\alpha'_k, \beta'_k) = (0, \frac{1}{k})$ donne $\ell' = 0$). D'après la proposition, si la limite existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe, elle doit être égale simultanément à ℓ et ℓ', ce qui n'est pas possible.

Remarque 5.10. L'étude de la limite pour d'une fonction vectorielle $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se réduit à l'étude de la limite de m fonction scalaires, en considérant les composantes de f. En effet

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D}} f(x) = y_0 \iff \forall i = 1, \dots, m, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D}} f_i(x) = y_{0,i}.$$

Cet une conséquence immédiate de la proposition précédente et de la proposition 5.7.

5.3.2 Utilisation des coordonnées polaires

Dans le cas des fonctions $f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, pour étudier la limite en $(0,0)$ il est parfois utile de faire appel aux coordonnées polaires : posons, pour $\rho \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$x = \rho\cos(\theta), \quad y = \rho\sin(\theta), \qquad \text{ainsi} \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2}.$$

À toute application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ on lui associe une application $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{f}(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).$$

Les deux applications f et $\tilde{f}$ sont essentiellement la même fonction écrite avec deux systèmes de coordonnées différentes. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell &\iff \forall\,\epsilon > 0\ \exists\,\rho_0 > 0 \text{ t.q. } (0 \leq \rho < \rho_0,\ 0 \leq \theta < 2\pi) \Rightarrow |f(\rho,\theta) - \ell| < \epsilon \\
&\iff \Big(\sup_{\theta\in[0,2\pi[} |\tilde{f}(\rho,\theta) - \ell|\Big) \to 0 \\
&\iff \lim_{\rho\to 0} \tilde{f}(\rho,\theta) = \ell \text{ uniformément en } \theta
\end{aligned}$$

Dans la pratique, on utilise l'encadré suivant:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell \iff \begin{array}{l} \exists\, G\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \text{ t.q. } G(\rho) \to 0 \text{ pour } \rho \to 0 \text{ et} \\ \forall\, \theta \in [0, 2\pi[, \text{ on a } \quad |\tilde{f}(\rho,\theta) - \ell| \le G(\rho). \end{array}$$

Exemple 5.11. Démontrons que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^3/(x^2+y^2) = 0$. En passant aux coordonnées polaires, après simplification du numérateur et dénominateur par ρ^2, on obtient la fonction $\tilde{f}(\rho,\theta) = \rho\cos^3\theta$. Mais $|\tilde{f}(\rho,\theta) - 0| \le \rho \to 0$ et la remarque dans l'encadré s'applique avec $G(\rho) = \rho$ (il est important que la fonction G puisse être prise indépendante de θ).

On aurait pu trouver le même résultat, sans utiliser les coordonnées polaires, via le théorème des gendarmes : comme $0 \le x^2/(x^2+y^2) \le 1$, on voit que $0 \le |f(x,y)| \le |x|$ et cet encadrement donne immédiatement que $f(x,y) \to 0$ pour $(x,y) \to 0$.

Exemple 5.12. Nous avons déjà prouvé, que la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(xy)/(x^2+y^2) = 0$ n'existe pas. On peut parvenir à la même conclusion à l'aide des coordonnées polaires : dans ce cas $\tilde{f}(\rho,\theta) = \cos\theta\sin\theta$. Donc $\lim_{\rho\to 0}\tilde{f}(\rho,\theta)$ dépend de θ ce qui suffit pour conclure que la limite n'existe pas. Observons que la fonction f est constante le long les droites passant par l'origine.

Proposition 5.9 (Opérations avec les fonction continues à valeur réelles)**.** *Si $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors les fonctions $f+g$, fg sont continues en x_0. Il en est de même pour $1/f$, à condition que $f(x_0) \ne 0$.*

5.3.3 Limites à l'infini

Soit $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, où D contient l'extérieur d'une boule. On écrit :

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x,y) = \ell \iff \forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\, R > 0 \text{ tel que } \forall\, x \text{ t.q.} \|x\| > R \text{ on a } |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Dans $\mathbb{R}^2$, on utilise souvent les coordonnées polaires (et dans $\mathbb{R}^3$ lescoordonnées sphériques) pour calculer ce type de limites.

Pour les fonctions à valeur dans $\mathbb{R}$, on peut facilement donner un sens aux écritures de type $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, ou encore $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$, etc.

5.4 Fonctions continues et fonctions lipschitziennes

Définition 5.10. *On dit qu'une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est lipschitzienne s'il existe $K > 0$ telle que, pour tout $x, x' \in \mathbb{R}^n$ on a*

$$\|f(x) - f(y)\| \le K\,\|x - y\|.$$

Exemple 5.13 (Exemples de fonctions lipschitziennes)**.** À compléter.

Définition 5.11. *On dit que f est continue en x_0 si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que:*

$$\|x - x_0\| < \delta \;\Rightarrow\; \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon.$$

On dit qu'une fonction est continue en A (où $A \subset \mathbb{R}^n$) si elle est continue en tout point $x_0 \in A$.

Autrement dit, une fonction est continue en un point x_0 si et seulement si la limite pour $x \to x_0$ de $f(x)$ existe et l'on a $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemple 5.14. Toute fonction lipschitzienne est continue. En effet, la définition de continuité (en tout point x_0) est satisfaite, dans ce cas, avec $\delta = \epsilon / K$.

Proposition 5.10 (Critère de continuité par les suites)**.** *Une fonction $f \colon X \to Y$ est continue en $x_0 \in X$ si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ convergente vers x_0 la suite $(f(x_n)) \subset Y$ converge vers $f(x_0)$.*

Dém. À compléter. $\square$

Rappelons que si $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et si $A \subset \mathbb{R}^m$, alors on note

$$f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) \in A\}$$

l'*image réciprique* de l'ensemble A par l'application f.

Théorème 5.11. *Soit $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application continue. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Alors $f^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Réciproquement, si $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est telle que, quel que soit U ouvert de $\mathbb{R}^m$ on a $f^{-1}(U)$ est ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors f est continue dans $\mathbb{R}^n$.

Dém. Soit $x_0 \in f^{-1}(U)$. Alors $f(x) \in U$ qui est ouvert et donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(f(x), \epsilon) \subset U$. La fonction étant continue en x_0, soit $\delta > 0$ comme dans la définition 5.9 de continuité. On a alors $B(x, \delta) \subset f^{-1}(U)$, ceci montre que $f^{-1}(U)$ est ouvert.

Réciproquement, soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pour montrer que f est continue en x prenons $\epsilon > 0$. Alors par l'hypothèse $f^{-1}(B(f(x_0), \epsilon)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, contenant x. Mais alors il existe $\delta > 0$ tel que $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \epsilon))$. La définition de continuité en x_0 est alors satisfaite, puisque si $d(x, x_0) < \delta$ alors $x \in f^{-1}(B(f(x_0), \epsilon))$, c'est à dire que $\|f(x), f(x_0)\| < \epsilon$. $\square$

Remarque 5.15. Une modification de l'énoncé précédent est nécessaire si l'ensemble de définition de la fonction n'est pas $\mathbb{R}^n$ tout entier. *

Par passage au complémentaire on en déduit la proposition suivante:

Proposition 5.13. *Soit $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application. Alors f est continue si et seulement si, quel que soit F fermé dans $\mathbb{R}^m$, on a que $f^{-1}(F)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$.*

---

*Si $D \subset \mathbb{R}^n$, on dit qu'un ensemble $U \subset D$ est un *ouvert de D* si, pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap D \subset U$. Un *fermé de D* est le complémentaire dans D d'un ouvert de D. Par exemple, si $D = [0, +\infty[$, l'intervalle $[0, 1[$ est un ouvert de D (alors qu'il n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$).

La modification du théorème précédent dans le cas plus général des fonctions définies sur un ensemble de définition $D \subset \mathbb{R}^n$ est la suivante.

Théorème 5.12. *Soit $f \colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application continue. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Alors $f^{-1}(U)$ est un ouvert de D.*

Réciproquement, si $f \colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est telle que, quel que soit U ouvert de $\mathbb{R}^m$ on a $f^{-1}(U)$ est ouvert de D, alors f est continue dans D.

La démonstration est essentiellement la même.

Une remarque semblable s'applique à la proposition 5.13. Aussi la proposition 5.14 admet une variante: si $D \xrightarrow{f} D' \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$ et f est continue dans D et g continue dans D', alors $g \circ f$ est continue dans D.

Proposition 5.14 (Composition de fonctions continues)**.** *Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ sont des applications continues entre espaces métriques alors l'application composée $h = g \circ f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ est continue.*

Dém. Il suffit d'observer que, pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^k$, $h^{-1}(U) = g^{-1}(f^{-1}(U))$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$ par la proposition (5.9). □

Une petite variante de la dernière proposition (avec les mêmes notations) est celle-ci (la démonstration repose sur la notion de voisinage):
Si f est continue en x_0 et g est continue en $y_0 = f(x_0)$, alors la fonction $h(x) = g(f(x))$ est continue en x_0.

Remarque 5.16. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in \mathbb{R}$. Alors les ensembles $\{x \in \mathbb{R}^n\colon f(x) > a\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^n\colon f(x) < a\}$ sont ouverts de $\mathbb{R}^n$. D'autre part, les lignes de niveau et les ensembles de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n\colon f(x) \geq a\}$ ou $\{x \in \mathbb{R}^n\colon f(x) \leq a\}$ sont des fermées. Ces affirmations sont une conséquence du théorème refth:continui et de la proposition 5.13. En effet, par exemple, on peut écrire $\{x \in \mathbb{R}^n\colon f(x) > a\} = f^{-1}(]a, +\infty[)$ et remarquer que l'intervalle $]a, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Proposition 5.15 (Continuité des fonctions vectorielles)**.** *Soit $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application vectorielle. Alors f est continue en $x_0 \in D$ si et seulement si ses m composantes $f_i\colon D \to \mathbb{R}$ sont continues ($i = 1, \ldots, m$).*

Dém. Immédiat, d'après la remarque 5.10. □

D'autre part, à partir d'une application (vectorielle ou scalaire) définie sur $\mathbb{R}^n$ on peut fixer des variables et obtenir ainsi d'autres applications. Considérons, par exemple, le cas d'une application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$. On lui associe les *applications partielles* $f(\cdot, y)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définies par $x \mapsto f(x, y)$ ainsi que les applications partielles $f(x, \cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définies par $y \mapsto f(x, y)$. La continuité des applications partielles $f(\cdot, y_0)$ et $f(x_0, \cdot)$ ne garantit pas la continuité de l'application f en (x_0, y_0). Par exemple, l'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0, 0) = 0$ et $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ n'est pas continue en $(0, 0)$ bien que les applications partielles le soient.

5.5 Bornes supérieures, inférieures

5.6 Définitions

Rappelons que si $A \subset \mathbb{R}$ est une partie majorée (c'est à dire, que A est contenue dans un intervalle de type $]-\infty, M]$, avec $M \in \mathbb{R}$) alors la borne supérieure de A est le plus petit majorant de A :

$$S = \sup A \iff \begin{array}{l} \forall a \in A,\ a \leq S \text{ et} \\ \forall \epsilon > 0, \exists a \in A \text{ telle que } a > S - \epsilon. \end{array}$$

De manière équivalente :

$$S = \sup A \iff \begin{array}{l} \forall a \in A,\ a \leq S \text{ et} \\ \exists (a_n) \subset A \text{ telle que } a_n \to S. \end{array} \qquad (*)$$

On dit que le $\sup(A)$ *est atteint* lorsque $S \in A$. Dans ce cas on dit que $\sup(A)$ est *le maximum* de A et on écrit plutôt $S = \max A$. Si A n'est pas borné supérieurement on pose $\sup A = +\infty$. Si $A \subset \mathbb{R}$ est une partie bornée inférieurement, alors la borne inférieure de A est le plus grand minorant de A :

$$I = \inf A \iff \begin{array}{l} \forall a \in A,\ I \le a \text{ et} \\ \forall \epsilon > 0 \exists a \in A \text{ telle que } a < I + \epsilon. \end{array}$$

Ou, de manière équivalente,

$$I = \inf A \iff \begin{array}{l} \forall a \in A,\ I \le a \text{ et} \\ \exists (a_n) \subset A \text{ telle que } a_n \to I. \end{array}$$

On dit que l'$\inf(A)$ *est atteint* lorsque $I \in A$. On dit alors que $\inf(A)$ est *le minimum* de A et on écrit $I = \min A$. Si A n'est pas borné inférieurement, on pose $\inf A = -\infty$. Une propriété profonde de $\mathbb{R}$, admise ici (assez subtile à démontrer à partir de la définition rigoureuse de $\mathbb{R}$) est:

Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure $S \in \mathbb{R}$.
Toute partie minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure $I \in \mathbb{R}$

En revanche, ça peut arriver que la borne supérieure ou inférieure d'un ensemble borné de nombre rationnels ne soit pas un nombre rationnel. Par exemple, considérer l'ensemble de nombre rationnels $A = \{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \colon n \in \mathbb{N}\}$. Pour cet ensemble on a $\inf(A) = \min(A) = 1$ et $\sup(A) = e$, qui est irrationnel (observer que la somme de la série de terme générale $\frac{1}{k!}$ est égale à e, ce qu'on démontre en appliquant la formule de Taylor à la fonction exponentielle). Pour cet ensemble, $\max(A)$ n'existe pas..

Si $f \colon D \to \mathbb{R}$, on note $f(D)$ l'image de f, c'est-à-dire l'ensemble

$$f(D) := \{f(x) \in \mathbb{R} \colon x \in D\} \subset \mathbb{R}.$$

Par définition $\sup f = \sup_{x \in D} f(x) := \sup f(D)$.

Définition 5.12. *Si $f \colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, toute suite $(x_k) \subset D$ vérifiant $f(x_k) \to \sup_{x \in D} f(x)$ est appelée* suite maximisante *pour la fonction f.*

Une suite maximisante existe toujours: si $S := \sup f(D)$ et $S < +\infty$, en appliquant (*) on voit qu'il existe $(y_k) \in f(D)$ telle que $y_k \to \sup f(D)$. Mais alors il existe $x_k \in D$ telle que $f(x_k) = y_k \to S$.

D'autre part si $\sup f(D) = +\infty$, alors $f(D)$ n'est pas majoré et donc il existe $(y_k) \subset f(D)$ telle que $y_k \to +\infty$ et on conclut de la même manière.

5.7 Applications des bornes sup et inf aux suites réelles

Théorème 5.16. *Toute suite réelle majorée converge. Toute suite réelle minorée converge.*

Dém. À compléter. □

Théorème 5.17 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toute suite réelle bornée possède une sous-suite convergente.*

Dém. À compléter. □

Théorème 5.18 (Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}^n$). *Toute suite bornée de $\mathbb{R}^n$ possède une sous-suite convergente.*

Dém. À compléter. □

5.8 Ensembles compacts et théorème de Weierstrass

Définition 5.13 (Compacts). *On dit qu'un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est* (séquentiellement) compact *si toute suite (x_n) contenue dans K possède une sous-suite convergente, avec limite dans K.*

Exemple 5.17.

- Dans $\mathbb{R}$, tout intervalle $[a, b]$ est compact: c'est une conséquence du théorème de Bolzano–Weierstrass.

- L'ensemble $]0, 1]$ n'est pas compact : en effet, la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien contenue dans $]0, 1]$, mais il est impossible d'en extraire une sous suite convergente dans $]0, 1]$. En effet, toute suite extraite de $(1/n)$ converge vers 0, qui est en dehors de l'ensemble.

Théorème 5.19 (Heine–Borel). *Un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$, est compact si et seulement s'il est fermé dans $\mathbb{R}^n$ et borné.*

Dém.

1. Démontrons qu'un ensemble K fermé et borné dans $\mathbb{R}^n$ est compact. Comme K est bornée, si $(x_k) \subset K$ alors cette suite possède une sous-suite $(x_{\varphi(k)})$ convergente, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass. Appelons ℓ la limite. On a $\ell \in \overline{K}$ (d'après la proposition 5.6). Mais $\overline{K} = K$ puisque K est fermé. Ceci prouve que K est bien compact.

2. Démontrons qu'un ensemble compact est borné. En effet, si par contradiction K n'était pas borné, alors on pourrait trouver une suite $(x_k) \subset K$ telle que $\|x_k\| \to +\infty$. Toute suite extraite de (x_k) serait elle même non bornée et donc non convergente. Cela contredit la compacité de K.

   Démontrons qu'un ensemble compact est fermé. En effet, si par contradiction K n'était pas fermée, alors on pourrait trouver $x \in \overline{K}\setminus K$, et donc un suite $(x_n) \subset K$ telle que $x_n \to x$ (d'après la proposition 5.6). Mais alors toute suite extraite de (x_n) serait convergerait vers $x \notin K$. Cela contredit encore une fois la compacité de K.

□

Dans un espace métrique général, on peut trouver des parties fermées et bornées qui ne sont pas compactes. C'est typiquement le cas dans des espaces vectoriels normés de dimension infinie. La situation est différente dans $\mathbb{R}^n$, comme le théorème fondamental suivant l'affirme.

Théorème 5.20. *Si $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une fonction continue et K est un compact de $\mathbb{R}^n$, alors $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}^m$.*

Dém. Soit $y_n \subset f(K)$. On a $y_n = f(x_n)$, où $(x_n) \subset K$. Alors il existe une suite extraite (x_{n_k}) et $x \in K$ tels que $x_{n_k} \to x$. Mais alors $f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(K)$. On a alors pu extraire de (y_n) une suite convergente dans $f(K)$. □

Théorème 5.21 (de Weierstrass)**.** *Soit $f: K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue, où K est un compact de $\mathbb{R}^n$. Alors f est bornée et possède un minimum et un maximum absolu sur K.*

Dém. On sait déjà que $f(K)$ est compact (et donc borné). La fonction f est alors bornée sur K. Soit $S = \sup_{x\in K} f(x)$. Soit $(x_k) \subset K$ une suite maximisante, c'est-à-dire telle que $f(x_k) \to S$. Comme K est compact, il existe $x \in K$ et $(x_{\varphi(k)})$ extraite de (x_k) telle que $x_{\varphi(k)} \to x$. Alors $f(x_{n_k}) \to f(x)$ par la continuité de f. En conclusion, $S = \lim_{k\to\infty} f(x_{\varphi(k)}) = f(x)$. Mais alors $f(x) = \max_{x\in K} f(x)$. L'existence du minimum absolu se démontre de la même manière. □

5.9 Continuité uniforme

Soit $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Commençons par rappeler que par définition (définition 5.11), f est continue sur D si et seulement si

$$\forall x \in D,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que, si } y \in D \text{ et } \|y - x\| < \delta, \text{ alors } \|f(x) - f(y)\| < \epsilon$$

La définition suivante exprime une propriété plus précise:

Définition 5.14. *Soit $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. On dit que f est uniformément continue sur D si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \textit{ tel que, } \forall x, y \in D \textit{ et } \|y - x\| < \delta, \textit{ alors } \|f(x) - f(y)\| < \epsilon.$$

Noter que dans cette définition δ doit être pris de manière indépendente de x (alors que dans la définition usuelle de continuité δ peut dépendre de x. Donc la notion de continuité uniforme est plus restrictive que celle de continuité.

Remarque 5.18 (Critère de non-continuité uniforme)**.** La *négation* de la continuité uniforme s'exprime ainsi:

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0,\ \exists x, y \in D,\ \|x - y\| < \delta, \text{ tels que } \|f(x) - f(y)\| \geq \epsilon.$$

En prenant $\delta = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2 \ldots)$ on trouve qu'il existe deux suites (x_n) et (y_n) contenues dans D telles que $\|x_n - y_n\| \to 0$, mais $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \epsilon$. Donc, $\|f(x_n) - f(y_n)\| \not\to 0$.

Réciproquement, si

$$\exists (x_n) \subset D\ , \exists (y_n) \subset D, \text{ telles que } \begin{cases} \|x_n - y_n\| \to 0 \\ \|f(x_n) - f(y_n)\| \not\to 0 \end{cases} \tag{NCU}$$

alors f *n'est pas uniformément continue* sur D.

Exemple 5.19. La fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue. En effet, il suffit d'appliquer

Remarque 5.20. Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Théorème 5.22 (Heine)**.** *Si K est compact et $f\colon K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est continue, alors f est uniformément continue sur K.*

Dém. Par l'absurde, si f n'est pas uniformément continue, alors la condition (NCU) s'applique. Soient (x_n) et (y_n) comme dans (NCU). On applique le théorème de Bolzano-Weierstrass à la suite (x_k) et on trouve une suite extraite telle que $x_{\varphi(k)}$ converge vers une limite $\ell \in D$. Mais $\|x_{\varphi(k)} - y_{\varphi(k)}\| \to 0$ et donc $y_{\varphi(n)}$ converge aussi vers la même limite ℓ. Par la continuité, $f(x_{\varphi(n)}) \to f(\ell)$ et $f(y_{\varphi(n)}) \to f(\ell)$. Donc

$$\|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\| \leq \|f(x_{\varphi(n)}) - \ell\| + \|\ell - f(y_{\varphi(n)})\| \to 0,$$

ce qui contredit (NCU). $\square$

6 Compléments.

Pour l'intégrale des fonctions réglées, voir poly de Jean Gilibert (MHT204, chapitre 5). `https://www.math.univ-toulouse.fr/~jgillibe/enseignement/MHT204_chap5.pdf`