# 1 Appréhender les distances : les normes sur $\mathbb{R}^n$

On rappelle que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace $\mathbb{R}^n$ est défini par

$$\mathbb{R}^n := \left\{(x_1, ..., x_n) : x_k \in \mathbb{R} \text{ pour tout } 1 \leq k \leq n\right\}.$$

Il forme un espace vectoriel pour l'addition et la multiplication par un scalaire définies respectivement par

1. addition : $x + y = (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$,
2. multiplication par un scalaire : si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda x = \lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$.

**Définition 1.1** (**Norme sur $\mathbb{R}^n$**). *Une norme sur $\mathbb{R}^n$ est une application*

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|$$

*vérifiant les quatre propriétés suivantes :*

1. *Positivité : Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \geq 0$ ;*
2. *Séparation : Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ;*
3. *Homogénéité : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda x = |\lambda| \|x\|$ ;*
4. *Inégalité triangulaire : Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*

*On dit alors que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.*

**Exemple 1.2** (**Valeur absolue**). Dans $\mathbb{R}$, la valeur absolue $|\cdot|$ est une norme.

✎ ***Exercice.*** *Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\|\cdot\| = \alpha|\cdot|$.*
***Correction.*** *Soit $\alpha > 0$, alors il est facile de montrer que $x \mapsto \alpha|x|$ est bien une norme sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}$, alors on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\|x\| = \|1 \times x\| = |x|\|1\|$ par homogénéité. En posant $\alpha = \|1\| > 0$ (puisque $1 \neq 0$), on a bien $\|\cdot\| = \alpha|\cdot|$.*

✎ **Remarque 1.3** (**Maximum des normes**). Soient $\|\cdot\|'$ et $\|\cdot\|''$ deux normes sur $\mathbb{R}^n$, alors $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| := \max(\|x\|', \|x\|'')$$

est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

**Définition 1.4** (**Distance sur $\mathbb{R}^n$ issue d'une norme**). *Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, alors la distance sur $\mathbb{R}^n$ associée à cette norme est l'application $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ définie par*

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

**Remarque 1.5.** La notion générale de distance $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est basée sur celle de la norme dans le sens où elle doit vérifier :

1. Positivité : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $d(x, y) \geq 0$ ;
2. Symétrie : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = d(y, x)$ ;

3. Séparation : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = 0 \iff x = y$ ;

4. Inégalité triangulaire : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Etant donnée cette définition, une distance peut ne pas être issue d'une norme sur $\mathbb{R}^n$.

A partir de l'inégalité triangulaire, on peut montrer le résultat suivant.

**Proposition 1.6** (**Deuxième inégalité triangulaire**)**.** *Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a*

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$$

*Démonstration.* Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors on remarque que

$$\begin{aligned}\|x\| &= \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \\ \|y\| &= \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|,\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité triangulaire dans chaque cas et la symétrie $\|u\| = \|-u\|$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ (homogénéité pour $\lambda = -1$) dans le deuxième cas. Ainsi on a montré que

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|, \quad \text{et} \quad \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|,$$

ce qui revient à dire que $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$. □

**Remarque 1.7.** Généralement, on synthétise les deux inégalités triangulaires de la façon suivante : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

**Proposition 1.8** (**Inégalité de Cauchy-Schwarz**)**.** *Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $y = (y_1, \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

*De plus, on a égalité si et seulement si $x = \lambda y$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que les vecteurs $x$ et $y$ sont liés.*

*Démonstration.* (Preuve vue en TD) □

**Remarque 1.9** (**Produit scalaire**)**.** Une autre façon d'écrire cette inégalité est la suivante : l'espace $\mathbb{R}^n$ peut être muni de la norme euclidienne (cf. proposition suivante) $\|x\|_2 := \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$ et du produit scalaire associé $\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$. On remarque que $\langle x, x\rangle = \|x\|_2^2$. Ainsi, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit aussi

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \big|\langle x, y\rangle\big| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

**Remarque 1.10** (**Pour aller plus loin : Inégalité de Hölder**)**.** L'inégalité de Cauchy-Schwarz est un cas particulier d'une inégalité plus générale appelée inégalité de Hölder : pour tous réels $p$ et $q$ tels que $1 \leq p, q \leq +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors, pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a (la première inégalité est évident, c'est la seconde qui est celle de Hölder)

$$\left|\langle x, y\rangle\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

**Proposition 1.11** (**Normes classiques**)**.** *Les applications* $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ *et* $\|\cdot\|_\infty$ *définie pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *par*

$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \|x\|_2 := \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

*sont des normes sur* $\mathbb{R}^n$.

**Remarque 1.12** (**Pour aller plus loin : p-normes**)**.** On peut montrer que, pour tout réel $p \geq 1$, la $p$-norme $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme sur $\mathbb{R}^n$. L'unique difficulté réside à montrer l'inégalité triangulaire, appelée inégalité de Minkowski.

*Démonstration.* Vérifions un-à-un les axiomes d'une norme dans chacun des cas.
**Norme $\|\cdot\|_1$.** Il s'agit d'une simple conséquence du fait que la valeur absolue $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{R}$. En effet, on a :

1. Positivité. Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors $|x_k| \geq 0$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, ce qui implique que $\|x\|_1 \geq 0$.

2. Séparation. Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Si $x = 0$, alors il est clair que $\|x\| = \sum_{k=1}^{n} |0| = 0$. Réciproquement, si $\|x\|_1 = 0$, alors on a $\sum_{k=1}^{n} |x_k| = 0$. Une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls, ce qui implique que $|x_k| = 0$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$. On en déduit donc que $x_k = 0$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, c'est-à-dire que $x = 0$.

3. Homogénéité. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, alors, en utilisant l'homogénéité de la valeur absolue,

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda||x_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |x_k| = |\lambda| \|x\|_1.$$

4. Inégalité triangulaire. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors

$$\|x + y\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|) = \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

**Norme $\|\cdot\|_\infty$.** On a

1. Positivité. Soit $x = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |x_k| = |x_j|$ pour un certain $j \in \{1, ..., n\}$. Alors il est clair que $\|x\|_\infty = |x_j| \geq 0$.

2. Séparation. Si $x = 0$, alors il est clair que $\|x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |x_k| = 0$.
Réciproquement, soit $x = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |x_k| = 0$. Alors cela implique que $|x_k| = 0$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$ et donc que $x = 0$.

3. Homogénéité. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^n$. Alors, on a

$$\|\lambda x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |\lambda x_k| = \max_{1\leq k\leq n} |\lambda||x_k| = |\lambda| \max_{1\leq k\leq n} |x_k| = |\lambda|\|x\|_\infty.$$

4. Inégalité triangulaire. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors, pour un certain $j \in \{1, ..., n\}$,

$$\|x + y\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |x_k + y_k| = |x_j + y_j| \leq |x_j| + |y_j| \leq \max_{1\leq k\leq n} |x_k| + \max_{1\leq k\leq n} |y_k| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

**Norme $\|\cdot\|_2$.** On a

1. Positivité. Pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, il est clair que $\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$.

2. Séparation. Si $x = 0$, alors on a $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n 0^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$.
Réciproquement, soit $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$. Alors on a nécessairement $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 0$ et toute somme nulle de termes positifs est composée de termes nuls, c'est-à-dire que pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $x_k^2 = 0$, i.e. $x_k = 0$, et ainsi $x = 0$.

3. Homogénéité. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors on a

$$\|\lambda x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n (\lambda x_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^n \lambda^2 x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\lambda^2 \sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\lambda^2}\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\|x\|_2.$$

4. Inégalité triangulaire. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors

$$\|x + y\|_2^2 = \sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2 = \sum_{k=1}^n \left(x_k^2 + y_k^2 + 2x_k y_k\right) = \sum_{k=1}^n x_k^2 + \sum_{k=1}^n y_k^2 + 2\sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on sait que $2\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq 2\|x\|_2\|y\|_2$ et ainsi

$$\|x + y\|_2^2 \leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 = \left(\|x\|_2 + \|y\|_2\right)^2.$$

En prenant la racine carrée de l'expression précédente, on trouve $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$.

□

✎ ***Exercice.*** *Soit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ et $N_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad N_\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i |x_i|.$$

*Montrer que $N_\alpha$ est une norme si et seulement si $\alpha \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.*
***Correction.*** *Supposons que $\alpha \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Il est alors facile de montrer, avec les mêmes arguments*

*que pour la norme $\|\cdot\|_1$, que $N_\alpha$ est une norme.*
*Réciproquement, si $N_\alpha$ est une norme, alors, en notant $\{e_1,...,e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors, puisque $\forall i \in \{1,...,n\}$, $e_i \neq (0,...,0)$, on obtient*

$$\forall i \in \{1,...,n\}, \quad N(e_i) = \alpha_i > 0$$

*et donc $\alpha \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.*

**Définition 1.13** (**Normes équivalentes**). *Soient $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes sur $\mathbb{R}^n$. On dit que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes s'il existe $m, M > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|.$$

✎ **Remarque 1.14.** Il s'agit bien d'une relation d'équivalence : binaire, réflexive, symétrique et transitive (Exercice).

**Théorème 1.15** (**Equivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$**). *Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.*

*Démonstration.* Cf. chapitre sur la continuité (on a besoin de la compacité et de la continuité pour prouver ce résultat). □

**Définition 1.16** (**Boules pour une norme donnée**). *Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, $d$ sa distance associée, $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Alors on définit :*

- *la boule ouverte centrée en $x$ et de rayon $r$ pour la norme $\|\cdot\|$ par*

$$B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|x-y\| < r\} = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < r\}$$

- *la boule fermée centrée en $x$ et de rayon $r$ pour la norme $\|\cdot\|$ par*

$$\overline{B}(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|x-y\| \leq r\} = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) \leq r\}$$

- *la sphère centrée en $x$ et de rayon $r$ pour la norme $\|\cdot\|$ par*

$$\partial B(x,r) = S(x,r) := \overline{B}(x,r) \setminus B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x-y\| = r\} = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) = r\}$$

**Remarque 1.17** (**Notations**). Si plusieurs normes sont définies, il peut y avoir confusion et on pourra noter $B_{\|\cdot\|}(x,r)$, $\overline{B}_{\|\cdot\|}(x,r)$ et $\partial B_{\|\cdot\|}(x,r)$.

**Exemple 1.18** (**Sur $\mathbb{R}$**). En dimension $n = 1$ pour la valeur absolue, $B(x,r) = ]x-r, x+r[$, $\overline{B}(x,r) = [x-r, x+r]$ et $S(x,r) = \{x-r, x+r\}$ et $]a,b[ = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$.

**Exemple 1.19** (**Sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$**). Donnons trois exemples de boules ouvertes :

$$B_{\|\cdot\|_2}((1,-3,0),2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 < 4\}$$
$$B_{\|\cdot\|_1}((2,-1),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-2| + |y+1| < 1\}$$
$$B_{\|\cdot\|_\infty}((0,-5),3) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y+5|) < 3\}.$$

**Exemple 1.20** (**Représentation des boules dans le plan**). En dimension $n = 2$, représentons les boules unités ($x = 0$ et $r = 1$) fermées pour les normes classiques, c'est-à-dire :

$$\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0,1) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y\|_1 \leq 1\} = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : |y_1| + |y_2| \leq 1\}$$
$$\overline{B}_{\|\cdot\|_2}(0,1) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y\|_2 \leq 1\} = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 \leq 1\}$$
$$\overline{B}_{\|\cdot\|_\infty}(0,1) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y\|_\infty \leq 1\} = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \max(|y_1|, |y_2|) \leq 1\}.$$

Il suffit de tracer leurs bords sur le cadran $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et de compléter par symétrie.

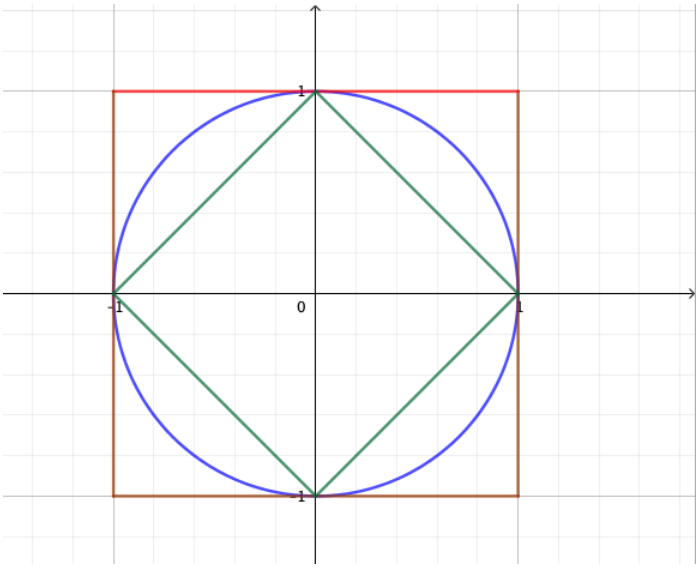



FIGURE 1 : Vert : $\partial\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0,1)$ ; Bleu : $\partial\overline{B}_{\|\cdot\|_2}(0,1)$ ; Rouge : $\partial\overline{B}_{\|\cdot\|_\infty}(0,1)$.

**Définition 1.21** (**Ensemble borné**). *Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, on dit que $A \subset \mathbb{R}^n$ est borné (pour la norme $\|\cdot\|$) s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x\| \leq M$. Autrement dit, $A$ est borné s'il existe $M > 0$ tel que $A \subset B_{\|\cdot\|}(0, M)$.*

**Remarque 1.22** (**Normes équivalentes et ensemble borné**). **Dans la pratique, on choisira la norme qui nous arrange** puisque toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. En particulier, montrer que, pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in A$, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, il existe $M_i > 0$ tel que $|x_i| \leq M_i$ suffit pour conclure que $A$ est borné dans $\mathbb{R}^n$.

**Définition 1.23** (**Convergence d'une suite pour une norme donnée**). *Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On dit que la suite $(x_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ tend vers $x \in \mathbb{R}^n$ pour la norme $\|\cdot\|$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N, \quad \|x_k - x\| < \varepsilon.$$

*On écrit aussi : $\lim_{k \to +\infty} x_k = x$ pour la norme $\|\cdot\|$.*

**Remarque 1.24.** Quelques remarques sur cette notion de convergence :
• Attention : une suite pourrait converger pour une certaine norme et pas pour une autre ! Sur $\mathbb{R}^n$, ce ne sera pas le cas, et cela grâce à l'équivalence des normes.

• On peut réécrire cette définition en utilisant la notion de boule ouverte associée à la norme $\|\cdot\|$ de la façon suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N, \quad x_k \in B_{\|\cdot\|}(x, \varepsilon).$$

On peut aussi dire : *"quelque soit le voisinage (cf. chapitre suivant, mais une boule ouverte suffit) de $x$ – aussi petit que l'on veut au sens de l'inclusion –, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans ce voisinage."*



**Proposition 1.25** (**Convergence des coordonnées d'une suite**). *La suite $(x_k)_k = (x_k^1, ..., x_k^n)_k \subset \mathbb{R}^n$ converge vers $x = (x^1, ..., x^n)$ pour $\|\cdot\|_2$ si et seulement si $(x_k^i)_k$ converge vers $x^i$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ pour $|\cdot|$.*

**Remarque 1.26.** On peut choisir n'importe quelle autre norme que $\|\cdot\|_2$ dans la proposition précédente, car toutes les normes sont équivalentes.

*Démonstration.* On suppose que $(x_k)_k = (x_k^1, ..., x_k^n)_k \subset \mathbb{R}^n$ converge vers $x = (x^1, ..., x^n)$ pour $\|\cdot\|_2$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N, \quad \|x_k - x\|_2 < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$, alors, en appliquant l'assertion précédente à $\varepsilon$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$,

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad |x_k^i - x^i| = \sqrt{(x_k^i - x^i)^2} \leq \|x_k - x\|_2 < \varepsilon.$$

Cela prouve que $(x_k^i)_k$ converge vers $x^i$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.
Réciproquement, supposons que $(x_k^i)_k$ converge vers $x^i$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, alors, pour chacun de ces $i$, on a

$$\forall \varepsilon_i > 0, \quad \exists N_i \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N_i, \quad |x_k^i - x^i| < \varepsilon_i.$$

Soit $\varepsilon > 0$, alors en appliquant les $n$ assertions précédentes à $\varepsilon_i = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, on trouve qu'il existe $N = \max_i N_i$ tel que pour tout $k \geq N$, on a

$$\|x_k - x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_k^i - x^i)^2 < \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2 = n\frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2,$$

et donc $\|x_k - x\|_2 < \varepsilon$, ce qui prouve que $(x_k)_k$ converge vers $x$. □

**Remarque 1.27.** Plusieurs remarques concernant cette partie du cours :

- Tout $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)-espace vectoriel de dimension fini est normable (on peut y définir une norme). En effet, un tel espace admet toujours une base $\{e_i\}_i$. Ainsi, on peut donc définir

  $$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, x_i \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}), \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

  qui est une norme sur cet espace (même preuve que pour la norme 1 classique).

- Exemple de norme sur un espace de dimension infini : soient $a < b$ et $C([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors l'application $\|\cdot\|_1$ définie par

  $$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$$

  est une norme sur $C([a, b], \mathbb{R})$.