2 Arpenter les lieux : éléments de topologie dans l'espace Euclidien $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$

Dans ce chapitre, on se restreint (sauf mention du contraire) à la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ définie par

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.1 Ouverts et fermés de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$

Définition 2.1 (**Ouverts et fermés de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$**). *On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_2$, alors :*

- *on dit que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ si*

$$\forall x \in \Omega, \quad \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset \Omega.$$

- *on dit que $F \subset \mathbb{R}^n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ si $\mathbb{R}^n \setminus F$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Remarque 2.2 (**Ensemble non-ouvert**). On remarque que $A \subset \mathbb{R}^n$ n'est pas un ouvert si et seulement si

$$\exists x \in A, \quad \forall r > 0, \quad B(x, r) \not\subset A.$$

Cela ne veut PAS dire que A est fermé ! Il existe des ensembles ni ouverts, ni fermés.

Remarque 2.3 (**Indépendance par rapport à la norme**). Comme toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$, la notion d'ouvert ne dépend pas de la norme choisie (norme équivalentes implique inclusion de boules ouvertes). Ainsi, la notion de fermé ne dépend pas non plus de la norme.

✎ ***Exercice :*** *Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si E est ouvert, alors $E = \mathbb{R}^n$.*
Correction. *On sait déjà que $E \subset \mathbb{R}^n$.*
Montrons que $\mathbb{R}^n \subset E$. Comme E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors $O \in E$. Comme E est ouvert, alors il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset E$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors il existe $y \in B(0, r)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y$. Comme E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors $x = \lambda y \in E$, et donc $\mathbb{R}^n \subset E$, ce qui permet de conclure l'égalité recherchée.

Proposition 2.4 (**Caractérisation séquentielle d'un fermé**). *Une partie F est fermé si et seulement si la limite de toute suite convergente d'éléments de F appartient à F.*

Démonstration. Raisonnons par contraposée et montrons ainsi que

$$F \text{ n'est pas fermé} \iff \exists (x_k)_k \subset F \text{ telle que } \lim_{k \to +\infty} x_k = x \notin F.$$

Supposons que F n'est pas fermé, alors F^c n'est pas ouvert et donc il existe $x \in F^c$ telle que pour $r > 0$, $B(x, r) \not\subset F^c$. On fixe une suite $(\varepsilon_k)_k \to 0$ de nombres strictement positifs tels que $\forall k \in \mathbb{N}$, $B(x, \varepsilon_k) \not\subset F$. On a donc : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists x_k \in B(x, \varepsilon_k) \cap F$. La suite $(x_k)_k$ ainsi construite est une suite d'éléments de F qui vérifie, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|x_k - x\| < \varepsilon_k \to 0$ quand $k \to +\infty$, et donc converge vers $x \notin F$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $(x_k)_k \subset F$ qui converge vers $x \notin F$. Ainsi $x \in F^c$ et, comme $(x_k)_k$ tend vers x,

$$\forall r > 0, \quad \exists k \in \mathbb{N}, \quad \|x_k - x\|_2 < r.$$

On a ainsi, $\forall r > 0$, $B(x,r) \not\subset F^c$, puisque cette boule contient $x_k \in F$. Ainsi, F^c n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et donc F n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^n$. □

Proposition 2.5 (**Réunions et intersections d'ouverts et de fermés**)**.** *On a :*

1. *Les ensembles $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble vide $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés.*
2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\{x\}$ est un fermé.*
3. *La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est un ouvert.*
4. *L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.*
5. *L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.*
6. *La réunion d'un nombre fini de fermés est un fermé.*

Démonstration. 1. Il est clair que si $(x_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ converge vers x, alors $x \in \mathbb{R}^n$. Cela prouve que $\mathbb{R}^n$ est fermé, et donc que sont complémentaire $\emptyset$ est ouvert.
De même, soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors $B(x,1) \subset \mathbb{R}^n$ et donc $\mathbb{R}^n$ est ouvert. Il en découle que sont complémentaire $\emptyset$ est un fermé.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors soit $(x_k)_k$ une suite de $\{x\}$. Alors on a évidemment $\forall k \in \mathbb{N}, x_k = x$. Ainsi, si $(x_k)_k$ converge, c'est vers $x \in \{x\}$. Il en découle que $\{x\}$ est fermé.

3. Soit $(\Omega_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ une famille quelconque (non-nécessairement dénombrable) d'ouverts de $\mathbb{R}^n$. Considérons l'ensemble $\Omega = \bigcup_k \Omega_k$. Soit $x \in \Omega$, alors il existe k tel que $x \in \Omega_k$. Comme Ω_k est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \Omega_k \subset \Omega$. Ainsi Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

4. Soit $\{\Omega_1, ..., \Omega_p\} \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fini d'ouverts. Considérons $\Omega = \bigcap_{k=1}^p \Omega_k$. Soit $x \in \Omega$, alors $x \in \Omega_k$ pour tout $1 \leq k \leq p$. Pour chaque k, il existe $r_k > 0$ tel que $B(x, r_k) \subset \Omega_k$. Ainsi, en choisissant $r = \min_k r_k > 0$ – car c'est le minimum sur un ensemble fini de nombres strictement positifs–, on obtient que $B(x,r) \subset \Omega_k$ pour tout k et donc $B(x,r) \subset \Omega$. Ainsi Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

5. Soit $(F_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ une famille quelconque de fermés de $\mathbb{R}^n$. Considérons l'ensemble $F = \bigcap_k F_k$, alors $F^c = \bigcup_k F_k^c$. Comme chaque F_k^c est ouvert, la réunion quelconque F^c de ces ensembles est ouverte dans $\mathbb{R}^n$ d'après 3. On en déduit que F est fermé dans $\mathbb{R}^n$.

6. Soit $\{F_1, ..., F_p\} \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fini de fermés et soit $F = \bigcup_{k=1}^n F_k$. Alors $F^c = \bigcap F_k^c$ est une intersection finie d'ouverts F_k^c. Il s'agit donc d'un ouvert. On en déduit que F est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

□

Exemple 2.6 (**Contre-exemples**)**.** On donne ici deux contre-exemples pour lesquels "fini" ne peut pas être remplacé par "infini" dans la proposition précédente :

1. Intersection infinie d'ouverts qui est fermée : dans $\mathbb{R}$, soit $\Omega_k := \left]-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right[$. Alors Ω_k est ouvert pour tout $k \geq 1$, car c'est la boule ouverte centrée en 0 et de rayon $1/k$, et on a $\Omega = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \{0\}$. En effet, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $0 \in \Omega_k$ donc $\{0\} \subset \Omega$, et si $x \in \Omega_k$ pour tout $k \geq 1$, alors $\forall k \geq 1, -\frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{k}$ et donc, en passant à la limite, $0 \leq x \leq 0$, c'est-à-dire $x = 0$, ce qui prouve que $\Omega \subset \{0\}$. On remarque que $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

2. Union infinie de fermés qui n'est ni ouverte, ni fermée : dans $\mathbb{R}$, soit $F_k = \{\frac{1}{k}\}$, alors F_k est un fermé pour tout $k \geq 1$ et $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$

   (a) n'est pas ouvert car $1 \in S$ et ne contient aucun intervalle ouvert centré en 1 ;

   (b) n'est pas fermé car la suite $\left(\frac{1}{k}\right)_k \subset S$ mais sa limite $0 \notin S$.

🎓 **Proposition 2.7** (**Boules et sphères**). *Quelque soit la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$, une boule ouverte (resp. fermée) de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}^n$. De plus, toute sphère de $\mathbb{R}^n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.
• Toute boule ouverte est un ouvert. Montrons que $B(x,r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $y \in B(x,r)$ et $\delta = r - \|x-y\|$, alors $B(y,\delta) \subset B(x,r)$ car si $z \in B(y,\delta)$, on a

$$\|z-x\| = \|z-y+y-x\| \leq \|z-y\| + \|y-x\| < \delta + \|y-x\| = r$$

et ainsi $z \in B(x,r)$. Ainsi, il existe une boule ouverte centrée en tout point de $B(x,r)$ contenue dans cette même boule : $B(x,r)$ est donc un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
• Toute boule fermée est un fermé. Soit $(y_k)_k \subset \overline{B}(x,r)$ une suite qui converge vers $y \in \mathbb{R}^n$. Montrons que $y \in \overline{B}(x,r)$. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|y-x\| = \|y-y_k+y_k-x\| \leq \|y-y_k\| + \|y_k-x\| \leq \|y-y_k\| + r$$

Ainsi, quand $k \to +\infty$, on a $\|y-y_k\| \to 0$ (par convergence de la suite vers y) et on obtient que $\|y-x\| \leq r$ et donc $y \in \overline{B}(x,r)$, ce qui prouve que $\overline{B}(x,r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
• Toute sphère est un fermé. On a $S(x,r) = \overline{B}(x,r) \setminus B(x,r) = \overline{B}(x,r) \cap B(x,r)^c$. Comme $\overline{B}(x,r)$ est un fermé et $B(x,r)$ un ouvert – et donc son complémentaire $B(x,r)^c$ est un fermé – on en déduit que $S(x,r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ comme intersection de deux fermés.

□

Proposition 2.8 (**Intervalles de $\mathbb{R}$**). *Soient $a < b$ deux réels, alors :*

1. $]a,b[,]-\infty,a[$ *et* $]b,+\infty[$ *sont des ouverts de* $\mathbb{R}$.
2. $[a,b],]-\infty,a]$ *et* $[b,+\infty[$ *sont des fermés de* $\mathbb{R}$.

✎ *Démonstration.* (*Exercice donné en CM*) La démonstration de ce résultat utilise à la fois le fait que les boules ouvertes (resp. fermées) sont ouvertes (resp. fermées) et la proposition précédente.
On peut réécrire $]a,b[= B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$ qui est une boule ouverte, donc un ouvert de $\mathbb{R}$.
Ainsi, en considérant pour tout $k \geq k_0$, $\Omega_k = \left]a+\frac{1}{k}, k\right[$, pour k_0 assez grand de sorte que $a + \frac{1}{k} < k$, qui est ouvert. On a donc

$$\bigcup_{k=k_0}^{\infty} \Omega_k =]a,+\infty[$$

qui est un ouvert de $\mathbb{R}$ comme réunion quelconque d'ouverts. On montre de même que $]b,+\infty[$ est ouvert en échangeant les bornes.
On peut réécrire $[a,b] = \overline{B}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$ qui est une boule fermée, donc un fermé de $\mathbb{R}$.
Comme $]-\infty,a] = \mathbb{R}\backslash]a,+\infty[$, cet ensemble est fermé comme complémentaire d'un ouvert.
Comme $[b,+\infty[= \mathbb{R}\backslash]-\infty,b[$, cet ensemble est fermé comme complémentaire d'un ouvert. □

Proposition 2.9 (**Ensembles ouverts et fermés**). *Les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^n$ sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. On sait que $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont des parties à la fois ouvertes et fermées de $\mathbb{R}^n$.
Réciproquement, soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ à la fois ouverte et fermée. Supposons que $A \notin \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$.
On peut donc trouver $a \in A$ et $b \in \mathbb{R}^n \backslash A$. On pose

$$I = \{t \in [0,1] : (1-t)a + tb \in A\}.$$

On remarque que :

- $I \neq \emptyset$ car $t = 0 \in I$ puisque dans ce cas-là, $(1-0)a + 0 \times b = a \in A$;
- I est majorée par 1 ;
- I est un ensemble fermé. En effet, si $(t_n)_n \subset I$ converge vers t, alors la suite de points $((1-t_n)a + t_n b)_n \subset A$ converge vers $(1-t)a + tb \in A$ car A est fermé. Par définition de I, on a donc $t \in I$.

Ainsi, par les deux premiers points, I admet une borne supérieure s. Soit $(t_n)_n \subset I$ qui converge vers s. Alors, par passage à la limite, $x_0 := (1-s)a + sb \in A$ car I est fermé.
Si $s = 1$, alors il y a une contradiction avec le fait que $(1-1)a + 1 \times b = b \notin A$.
Si $s < 1$, comme A est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset A$ ce qui implique qu'il existe $t \in]s, 1[$ tel que $ta + (1-t)b \in B(x_0, r) \subset A$, ce qui contredit la définition de la borne supérieure s. On a donc une contradiction dans tous les cas, ce qui veut dire que $A \in \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$. □

Remarque 2.10. Ainsi, quand on a montré qu'un ensemble (différent de $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$) est ouvert, il est inutile de montrer qu'il n'est pas fermé !

Proposition 2.11 (**Produits d'ouverts ou de fermés**). *Soient $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ munis de leurs normes euclidiennes $\|\cdot\|_2$, alors :*

1. *si $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ et $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^p$ sont deux ouverts, alors $\Omega_1 \times \Omega_2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.*
2. *si $F_1 \subset \mathbb{R}^n$ et $F_2 \subset \mathbb{R}^p$ sont deux fermés, alors $F_1 \times F_2$ est un fermé de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.*

Démonstration. On définit la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ de la façon suivante :

$$\forall x = (u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \quad \|x\|_\infty = \max(\|u\|_2, \|v\|_2).$$

✎ Il s'agit bien d'une norme (*Exercice*). De plus, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, et pour tout $r > 0$, on a

$$B_{\|\cdot\|_\infty}(x,r) = B_{\|\cdot\|_2}(u,r) \times B_{\|\cdot\|_2}(v,r).$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} y = (u',v') \in B_{\|\cdot\|_\infty}(x,r) &\iff \max(\|u-u'\|_2, \|v-v'\|_2) < r \iff \|u-u'\|_2 < r \text{ et } \|v-v'\| < r \\ &\iff u' \in B_{\|\cdot\|_2}(u,r) \text{ et } v' \in B_{\|\cdot\|_2}(v,r) \\ &\iff y \in B_{\|\cdot\|_2}(u,r) \times B_{\|\cdot\|_2}(v,r). \end{aligned}$$

1. Soit $x = (u, v) \in \Omega_1 \times \Omega_2$. Comme Ω_1 et Ω_2 sont ouverts, alors $\exists r_1, r_2 > 0$ tels que $B(u, r_1) \subset \Omega_1$ et $B(v, r_2) \subset \Omega_2$. Soit $r := \min(r_1, r_2)$, alors

$$B_{\|\cdot\|_\infty}(x, r) = B_{\|\cdot\|_2}(u, r) \times B_{\|\cdot\|_2}(v, r) \subset B_{\|\cdot\|_2}(u, r_1) \times B_{\|\cdot\|_2}(v, r_2) \subset \Omega_1 \times \Omega_2.$$

   Comme $\|\cdot\|_\infty$ est équivalente à $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ par l'équivalence des normes en dimension finie, il est donc clair que $\Omega_1 \times \Omega_2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

2. Soit $\{x_k = (u_k, v_k)\}_k \subset F_1 \times F_2$ une suite qui converge vers $x = (u, v)$. Comme F_1 et F_2 sont fermés et $u_k \to u$, $v_k \to v$ alors $u \in F_1$ et $v \in F_2$. Ainsi, $x \in F_1 \times F_2$ et donc cet ensemble est fermé.

□

Remarque 2.12 (**Produit de boules**)**.** Attention : le produit de deux boules euclidiennes n'est pas une boule euclidienne. Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, $B_{\|\cdot\|_2}((0,0),1) \times]-1,1[$ où $]-1,1[$ est la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}$ n'est PAS la boule unité de $\mathbb{R}^3$, $B_{\|\cdot\|_2}((0,0,0),1)$, mais plutôt un cylindre de rayon 1 et de hauteur 1. On a plutôt, pour $x = (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et $r > 0$, $B_{\|\cdot\|_\infty}(x, r) = B_{\|\cdot\|_2}(u, r) \times B_{\|\cdot\|_2}(v, r)$ comme dans la preuve ci-dessus.
De même, on retrouve la boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ pour la norme infinie comme produit de boules ouvertes de $\mathbb{R}$ pour la valeur absolue, i.e.

$$B_{|\cdot|}(0,1) \times B_{|\cdot|}(0,1) = B_{\|\cdot\|_\infty}((0,0),1) =]-1,1[^2.$$

Proposition 2.13 (**Image réciproque d'un ouvert/fermé par une application continue**)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application continue, alors si $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ est un ouvert (resp. F est un fermé), $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Montrons-le pour F fermé. Alors on a

$$f^{-1}(F) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in F\}.$$

Soit $(x_k)_k \subset f^{-1}(F)$ qui tend vers x. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f(x_k) \in F$. Comme f est continue, $f(x_k) \to f(x)$ et comme F est fermé, la suite $(f(x_k))_k$, qui ici converge, a sa limite dans F. On en déduit que $f(x) \in F$ et donc que $x \in f^{-1}(F)$ et ainsi finalement que $f^{-1}(F)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, alors comme

$$\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(\Omega) = f^{-1}(\mathbb{R}^p \setminus \Omega),$$

le fait que $\mathbb{R}^p \setminus \Omega$ soit fermé comme complémentaire d'un ouvert prouve que $\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(\Omega)$ est un fermé d'après le point précédent, et donc que $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. □

2.2 Points intérieurs/adhérents

Définition 2.14 (**Voisinage**). *On dit que $V \subset \mathbb{R}^n$ est un voisinage d'un point $x \in \mathbb{R}^n$ s'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset V$.*

Exemples 2.15. $[0,2]$, $]-3,3[$ et $]1/2,3/2]$ sont des voisinages de $x = 1$ car, par exemple, ils contiennent tous les trois l'intervalle ouvert $]3/4,5/4[$ qui contient lui-même $x = 1$.

Définition 2.16 (**Point intérieur à une partie de $\mathbb{R}^n$**). *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. On dit que le point x est intérieur à A si A est un voisinage de x, c'est-à-dire si $\exists r > 0$, $B(x,r) \subset A$.*
L'intérieur de A, noté $\mathring{A}$, est l'ensemble des points intérieurs à A.

Remarque 2.17. Un point y est dit extérieur à A s'il est intérieur à son complémentaire. L'extérieur de A est donc $\overset{\circ}{\overline{\mathbb{R}^n \setminus A}} \neq \mathbb{R}^n \setminus \mathring{A}$ (pensez à A comme étant une boule ouverte).

Exemple 2.18. Le point 1 est intérieur à $]0,2[$ et à $[0,3]$.

Proposition 2.19 (**Ouvert et intérieur**). *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Alors A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\mathring{A} = A$.*

Démonstration. Evident par définition (cf. aussi TD). □

Définition 2.20 (**Point adhérent à une partie de $\mathbb{R}^n$**). *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Un point x est adhérent à A si chaque voisinage de x rencontre A, c'est-à-dire que pour tout voisinage V de x, on a $V \cap A \neq \emptyset$.*
L'ensemble des points adhérents à A, aussi appelé adhérence de A, est noté $\overline{A}$.

Proposition 2.21 (**Propriétés de l'adhérence d'un ensemble**). *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Alors $x \in \mathbb{R}^n$ est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite $(x_k)_k \subset A$ telle que $\lim_{k \to +\infty} x_k = x$.*

Démonstration. (Preuve expliquée brièvement en CM, car le résultat est évident si on a bien compris la définition de point adhérent). Supposons que $(x_k)_k \subset A$ converge vers x et montrons que x est adhérent à A. Soit V un voisinage de x. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset V$. Or, par convergence de $(x_k)_k$ vers x, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, $x_k \in B(x,r)$ et ainsi $V \cap A \neq \emptyset$, ce qui veut dire que x est un point adhérent à A.
Supposons maintenant que x est adhérent à A. Alors pour tout voisinage V de x, $V \cap A \neq \emptyset$, ce qui est vrai en particulier pour $V = B(x,r)$ pour tout $r > 0$. Soit $(\varepsilon_k)_k \subset \mathbb{R}_+^*$ une suite qui tend vers 0. Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists x_k \in B(x,\varepsilon_k) \cap A \neq \emptyset$. On a donc construit une suite $(x_k)_k \subset A$ qui converge vers x puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|x - x_k\|_2 < \varepsilon_k \to 0$. □

Exemple 2.22. Dans $\mathbb{R}^2$, le point $(0,0)$ est adhérent à $A =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.
En effet, on peut construire la suite $(x_k)_k \subset A$ définie pour tout $k \geq 1$ par $x_k = (1/k, 1/k)$ qui tend vers $(0,0)$ quand $k \to +\infty$.

Proposition 2.23 (**Fermé et adhérence**). *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Alors A est un fermé de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\overline{A} = A$.*

Démonstration. Evident par définition (cf. aussi TD). □

Définition 2.24 (**Densité**). *Soient $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, alors on dit que A est dense dans B si $B = \overline{A}$.*

Exemple 2.25. On sait que $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, c'est-à-dire que l'ensemble des rationnels et l'ensemble des irrationnels sont denses dans $\mathbb{R}$. Tout réel est donc limite d'une suite de rationnels et d'une suite d'irrationnels.

Pour $A \subset \mathbb{R}^n$, définissons la distance de $x \in \mathbb{R}^n$ à A :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|_2.$$

Alors on a le résultat suivant.

Proposition 2.26 (**Adhérence et distance**). *Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $A \subset \mathbb{R}^n$, alors $x \in \overline{A}$ si et seulement si $d(x, A) = 0$.*

Démonstration. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\iff \exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A, \lim_{k\to+\infty} x_k = x \\ &\iff \exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A, \lim_{k\to+\infty} \|x - x_k\|_2 = 0 \\ &\iff \inf_{a\in A} \|x - a\|_2 = 0 \\ &\iff d(x, A) = 0. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.27 (**Adhérence et intérieur de $B(x, r)$**). *Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, alors :*

1. $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$ *(l'adhérence d'une boule est la boule fermée) ;*
2. $\overbrace{\overline{B}(x, r)}^{\circ} = B(x, r)$ *(l'intérieur d'une boule est la boule ouverte).*

Démonstration. Admise (vous pouvez essayer de le démontrer). □

Définition 2.28 (**Bord/frontière d'un ensemble**). *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, alors on définit par $\partial A = \overline{A}\backslash\mathring{A}$ le bord (ou la frontière) de A.*
En particulier, $\overline{A} = \mathring{A} \sqcup \partial A$ et le triplet $\left(\mathring{A}, \partial A, \mathbb{R}^n\backslash\overline{A}\right)$ forme une partition de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 2.29. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall r > 0$, $\partial B(x, r) = S(x, r)$ puisque $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$ et $\overbrace{\overline{B}(x, r)}^{\circ} = B(x, r)$.

2.3 Compacts de $\mathbb{R}^n$

Définition 2.30 (**Compact de $\mathbb{R}^n$**). *On dit que l'ensemble non-vide $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact si toute suite d'éléments de K admet une sous-suite convergente dans K.*

Remarque 2.31. Une autre définition équivalente sera donnée en L3 en termes de recouvrement de K par des ouverts.

Théorème 2.32 (**Heine-Borel**). *Un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si K est fermé et borné dans $\mathbb{R}^n$.*

Remarque 2.33. Attention : Ce résultat n'est valable qu'en dimension finie !

Démonstration. Supposons que K est fermé et borné. Montrons que K est compact. Soit $(x_k)_k$ une suite d'éléments de K. Comme K est borné, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, $(x_k)_k$ admet une sous-suite $(x_{\varphi(k)})_k$ qui converge vers x. Comme K est fermé, il est clair que $x \in K$, et donc K est compact.
Réciproquement, supposons que K est compact et montrons que K est fermé et borné. Raisonnons par l'absurde.
• Si K n'est pas fermé, Alors K^c n'est pas ouvert et ainsi, en posant une suite $(\varepsilon_k)_k \subset \mathbb{R}_+^*$ tendant vers 0, on a que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut trouver $x_k \in B(x, \varepsilon_k) \cap K \neq \emptyset$. La suite $(x_k)_k \subset K$ ainsi construite tend vers $x \notin K$, car $\|x - x_k\|_2 < \varepsilon_k \to 0$, ainsi que toute ses sous-suites, ce qui est impossible car K et compact. Ainsi K est fermé.
• Si K n'est pas borné, alors il existe une suite $(x_k)_k \subset K$ telle que $\|x_k\|_2 \geq k$ pour tout k. Ainsi toute sous-suite de $(x_k)_k$ serait aussi non-bornée et donc divergente, ce qui est une contradiction avec le fait que K est compact. □

Exemple 2.34 (Boules fermées). Toute boule fermée $\overline{B}(x, r)$ est compacte dans $\mathbb{R}^n$.
Pour aller plus loin : Le Théorème de Riesz nous apprend que les boules fermées sont compactes si et seulement l'espace que l'on considère est de dimension finie. En dimension infinie, la notion de compacité existe mais les boules fermées ne sont pas compactes! On pourra se référer à cette page pour en savoir plus.



Proposition 2.35 (Intersection et union de compacts). *Tout intersection quelconque (resp. union finie) de compacts de $\mathbb{R}^n$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Soit $\{K_i\}_{i \in I}$ une famille quelconque de compacts de $\mathbb{R}^n$, ce sont donc des fermés-bornés d'après le théorème de Heine-Borel. L'ensemble $K = \bigcap_{i \in I} K_i$ est donc :

- fermé comme intersection quelconque de fermés.
- borné car, étant donné $i \in I$, $K \subset K_i$ et comme K_i est borné, K l'est aussi.

De plus, si $\{K_1, ..., K_p\}$ est une famille finie de compacts, alors l'ensemble $K' = \bigcup_{i=1}^p K_i$ est :

- fermé comme union finie de fermés.
- borné. En effet, pour tout $i \in I = \{1, ..., p\}$, K_i est borné donc il existe $M_i > 0$ tel que pour tout $x \in K_i$, $\|x\|_2 \leq M_i$. Comme I est un ensemble fini, $M := \max_{i \in I} M_i > 0$ existe. Ainsi, soit $x \in K'$, alors il existe $i \in I$ tel que $x \in K_i$ et donc $\|x\| \leq M_i \leq M$, ce qui prouve que K' est borné.

□

Proposition 2.36 (Produit de compacts). *Soit $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ et $K_2 \subset \mathbb{R}^p$ deux compacts. Alors $K_1 \times K_2$ est un compact de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.*

Démonstration. $K_1 \times K_2$ est un fermé comme produit de fermés. De plus, il est clair que c'est aussi une partie bornée de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Il s'agit donc d'un compact. □

Exemple 2.37. Le cube $K = [0, 1]^n$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.