Partiel 1 (1h30)

Veuillez rédiger les exercices dans l'ordre SVP - quitte à sauter des pages. Cela limitera grandement le risque d'erreur de comptage et de confusion/perte d'information.

La qualité de la rédaction est d'autant plus importante que l'exercice semble évident.

Mettez en valeur les réponses (rouge, encadrement...), SVP.

L'énoncé comporte 5 exercices, notés sur 5+5+4+3+5=22 points.

1 Intégrales impropres

Est-ce que l'intégrales impropres ci-dessous convergent? Justifier.

A. (4 pt) $\int_0^{\pi/2} f(t)\,dt,\ f(t) = \ln(\sin(t))$.

B. (1 pt) $\int_0^{\pi/2} f(t)\,dt,\ f(t) = \cos(\ln(t))$.

2 Séries numériques

A. (2 pt) A-t-on convergence pour $\Sigma\, u_n,\ u_n = \frac{\cos(\pi n)}{\sqrt{n+\sqrt{n}}}$?.

B. (1 pt) Et pour $\Sigma\, u_n,\ u_n = \frac{\cosh(\pi n)}{\sqrt{n+\sqrt{n}}}$?.

C. (2 pt) Calculer la somme suivante en utilisant la méthode des séries téléscopiques:

$$\Sigma_{n\geq 1}\, u_n,\ u_n = \frac{2n+1}{(n^2+n)^2}.$$

TOURNEZ LA PAGE SVP

3 Suites de fonctions

A-t-on convergence simple? uniforme? pour les suites de fonctions suivantes:

A. (3 pt) $f_n :]0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin(nx)/nx$.

B. (1 pt) $f_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin(nx)$.

4 Séries de fonctions

A-t-on convergence simple? uniforme? normale? pour les séries de fonctions suivantes:

A. (2 pt) $\Sigma_{n\geq 1} f_n(x)$, $f_n(x) = \frac{\sin(\ln(x+1))}{n^2}$ pour $x \in [0,1]$.

B. (1 pt) $\Sigma_{n\geq 1} f_n(x)$, $f_n(x) = 1/n(x+1)$ pour $x \in [0,1]$.

5 Séries entières

A. (2 pt) Rayon de convergence pour la série entière $\Sigma_{n\geq 0} a_n z^n$, $a_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$?

B. (1 pt) Même question pour $\Sigma_{n\geq 0} z^{3n+5}$?

C. (2 pt) Calculer la somme suivante en se servant d'une série entière bien choisie:

$$\Sigma_{n\geq 1} e^{-n}/n.$$