Correction Partiel 1 (1h30)

1 Correction exercice 1

A. La fonction f est continue croissante de $-\infty$ vers 0 vers sur $[0, \pi/2]$. Il suffit donc de s'intéresser au comportement de f au voisinage de 0.
Comme $\sin(t) = t + o(t)$, pour t assez petit, $t/2 \leq \sin(t) \leq 2t$, et par conséquent

$$\ln(t/2) \leq f(t) \leq \ln(2t),$$

donc (toutes les quantités considérées étant négatives):

$$-\ln(t) - \ln(2) = -\ln(2t) \leq |f(t)| \leq -\ln(t/2) = -\ln(t) + \ln(2).$$

La fonction constante $\ln(2)$ est clairement intégrable sur $[0, \pi/2]$, il reste à étudier celle de $-\ln(t)$.
Or, celle-ci a déja été vue en TD: comme ln admet comme primitive $t \mapsto t\ln(t)$, on a pour $a > 0$:

$$\int_a^{\pi/2} \ln(t) = \pi/2 \ln(\pi/2) - a\ln(a),$$

et par croissance comparée $\lim_{a\to 0} a\ln(a) = 0$.
Conclusion: l'intégrale impropre est bien convergente.

B. La fonction f est bornée et continue sur l'intervalle borné $[0, \pi/2]$: l'intégrale converge donc.

2 Correction exercice 2

A. On commence par remarquer que $\cos(\pi n) = (-1)^n$. Ensuite, on remarque que la fonction $x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{x}}$ est croissante et tend vers $+\infty$. Du coup nous avons u_n qui a des signes alternés et avec $|u_n|$ monotone décroissante vers 0.
On peut donc appliquer le critère des séries alternées, et conclure que la série converge.

B. Par définition de cosh, on a $u_n = \frac{\cosh(\pi n)}{\sqrt{n+\sqrt{n}}}$ qui satisfait pour $n \to +\infty$:

$$u_n = \frac{e^{\pi n} + e^{-\pi n}}{2\sqrt{n + \sqrt{n}}} \sim \frac{e^{\pi n}}{2\sqrt{n}} \frac{1 + e^{-2\pi n}}{\sqrt{1 + \sqrt{1/n}}} \sim \frac{e^{\pi n}}{2\sqrt{n}}.$$

Par croissance comparée, cette dernière quantité tend vers $+\infty$: la série diverge donc grossièrement.

C. On reconnaît au dénominateur le produit $n^2(n+1)^2$, et au numérateur $(n+1)^2 - n^2$. Du coup:

$$u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

et les sommes partielles valent

$$\Sigma_{1\leq n\leq N} u_n = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{(N+1)^2}.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient que la somme de la série vaut 1.

3 Correction exercice 3

A. On a bien convergence simple vers 0 pour tout $x \in]0, \pi]$ car pour tout x, $|f_n(x)| \leq x^{-1}/n$ et cette dernière quantité tend bien vers 0.
Par contre, pas de convergence uniforme car en prenant $x_n = 1/n$ on a:

$$\|f_n - f\|_\infty \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| = \sin(1)/1,$$

donc $\|f_n - f\|_\infty$ ne peut pas converger vers 0.

B. Pas de convergence simple: par exemple pour $x = \pi/2$, la suite prend alternativement les valeurs $0, 1, 0, -1$...

4 Correction exercice 4

A. On a pour tout n:

$$\|f_n\|_\infty \leq 1/n^2,$$

donc la somme des normes infinies converge par comparaison avec les séries de Riemann. Du coup on a convergence normale, donc aussi uniforme et simple, de la série.

B. Pour tout x, la série est égale à $1/(x+1)$ multipliée par une série de Riemann divegente: donc pas de convergence simple, et a fortiori aucune des 2 autres.

5 Correction exercice 5

A. Appliquons le critère de D'Alembert pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} &= \frac{(2n)!(n+1)!(n+2)!}{n!(n+1)!(2n+2)!} = \frac{(n+2)!}{n!}\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= \frac{(1+1/n)(1+2/n)}{(2+1/n)(2+2/n)} \longrightarrow_{n\to+\infty} 1/4.\end{aligned}$$

Le rayon de convergence est donc de $1/4$.

B. On peut remarquer que pour $|z| \geq 1$ la série entière diverge grossièrement, et pour $|z| < 1$ elle converge car dominée par la série géométrique $\Sigma_{n\geq 0}\, z^n$. Du coup le rayon de convergence vaut 1.
Alternative: on peut poser $y = z^3$, appliquer le critère de Cauchy ou D'Alembert et obtenir le rayon de convergence égal à 1.

C. Regardons la série entière $F(z) = \Sigma_{n\geq 1}\, z^n/n$. Il s'agit de la primitive s'annulant en 0 de la série entière

$$G(z) = \Sigma_{n\geq 1}\, z^{n-1} = \Sigma_{k\geq 0}\, z^k.$$

Cette dernière a comme rayon de convergence 1 et vaut $1/(1-z)$ à l'intérieur du disque de convergence.
Du coup, en prenant la primitive, pour $|x| < 1$ on a $F(x) = -\ln(|x-1|) = -\ln(1-x)$ (car $F(0) = 0$) et comme $|e^{-1}| < 1$, la somme à calculer vaut:

$$-\ln(1-e^{-1}) = \ln\frac{1}{1-e^{-1}} = \ln\frac{e}{e-1} = \ln e - \ln(e-1) = 1 - \ln(e-1).$$