Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre d'automne 2026–2027**

L2 UE : Analyse pour l'économie 1

Contrôle Partiel du 19 octobre 2026

Durée : 2 heures

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.

Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées, et la rédaction la plus précise possible.

Exercice 1 Questions de cours (4 points)

Dans tout l'exercice, on considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

1. Vrai ou Faux ? Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers la fonction nulle sur I, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur I. Justifier par un résultat du cours ou par un contre-exemple.
2. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 0}(-1)^n f_n$. Donner les hypothèses vues en cours permettant de conclure que cette série converge uniformément sur I.

Exercice 2 Convergence de séries et d'intégrales (4 points)

Les intégrales et séries suivantes sont-elles convergentes ? Justifier.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^5}{\sqrt{t}(t^4+1)}dt$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\cos^2(n)}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{3^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n-1)!}$

Exercice 3 Convergence uniforme et limites d'intégrales (4 points)

On considère la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $I =]0, +\infty[$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x > 0, \quad f_n(x) = \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{n}.$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur I vers une fonction f à déterminer.
2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt \neq \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right) dt$.
   Expliquer la différence entre ce résultat et le théorème vu en cours concernant l'interversion limite-intégrale.

Exercice 4 Suite de fonctions (4 points)

1. Trouver tous les réels x tels que $\cos^2(\pi x) = 1$.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \cos^{2n}(\pi x).$$

   Démontrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement dans $\mathbb{R}$ vers une fonction **discontinue** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que l'on déterminera.
3. La convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
4. Trouver un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$ où la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme.

Exercice 5 Autour de la série harmonique (4 points)

On considère les suites réelles $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ données par

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_{2n} - u_n.$$

1. La suite (u_n) est-elle convergente ?
2. En utilisant une comparaison somme-intégrales, trouver un encadrement de la forme

$$\forall n \geq 2, \qquad \ln(a_n) \leq v_n \leq \ln(b_n),$$

   où $a_n \to 2$ et $b_n \to 2$.
3. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.