Séries entières.

Exercice 88 Pour chacune des séries entières ci-dessous, déterminer son rayon de convergence (on ne demande PAS de calculer sa somme).

$$1)\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{3^n}\, z^n \qquad 2)\ \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\, z^n \qquad 3)\ \sum_{n\geq 0} n!\, z^n \qquad 4)\ \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}\, z^n$$

$$5)\ \sum_{n\geq 0} 8^n\, z^{3n+2} \qquad 6)\ \sum_{n\geq 0} \frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\, z^{2n}$$

Exercice 89
Pour chacune des séries entières ci-dessous, déterminer son rayon de convergence puis sa somme.

$$1)\ \sum_{n\geq 0} n\, x^n \qquad 2)\ \sum_{n\geq 0} n^2\, x^n \qquad 3)\ \sum_{n\geq 1} \frac{nx^{2n}}{(2n+1)!}$$

Exercice 90
Calculer les sommes de séries numériques proposées ci-dessous :

$$1)\ \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(4n)!} \qquad 2)\ \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n(n+1)(n+2)}$$

Exercice 91
Développer les fonctions suivantes en série entière autour de 0 :

$$1)\ f_1(x) = \frac{1+x}{1-x} \qquad 2)\ f_2(x) = \frac{1}{1+x+x^2} \qquad 3)\ f_3(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)} \qquad 4)\ f_4(x) = \cosh x \cos x$$

Exercice 92
1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ est uniformément convergente sur $[0,1]$.
2) Donner une expression simple de cette expression valable sur $[0,1[$.
3) Déduire des deux questions qui précèdent la valeur de la somme de la série numérique $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 93
On suppose que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ a un rayon de convergence non nul et que, sur son intervalle de convergence, sa somme $y(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$t^2 y'' + 4ty' + (2-t^2)y - 1 = 0$$

1) Déterminer tous les coefficients a_n.
2) En déduire une expression simple de la fonction $y(t)$, valable en tout point non nul de l'intervalle de convergence.

Exercice 94
Même exercice que le précédent avec l'équation différentielle

$$4ty'' + 2y' + y = 0.$$

(Ici on déterminera les coefficients en fonction de a_0).