Analyse pour l'économie 1

Corrigé de partie 1 de l'examen 2017/18

(A) $f_n(x) = \dfrac{2x}{n^2+x^2}$, $n \geq 1$, $x \in [0, \infty[$

a) $f_n(x) \geq 0$ et $f_n(x) \leq \dfrac{2x}{n^2}$

Donc, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est majorée par la série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2x}{n^2} = 2x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$

(série de Riemann à l'exposant $2 > 1$).

b) Sur $[0, a]$, on a

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{2x}{n^2} \leq 2a \cdot \frac{1}{n^2}$$

$\sum \|f_n\|_\infty$ est donc majorée par

$2a \cdot \sum \dfrac{1}{n^2}$ convergente (Riemann, $2 > 1$)

et on a bien convergence normale.

c) $$\int_0^1 S(x)\,dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

cv. normale, donc uniforme, et f_n continue

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{2x}{n^2+x^2}\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln(n^2+x^2)\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln(n^2+1) - \ln(n^2)\right) \quad \checkmark$$

d) $$f_n'(x) = \frac{(n^2+x^2)\cdot 2 - 2x\cdot 2x}{(n^2+x^2)^2} = \frac{2n^2-2x^2}{(n^2+x^2)^2}$$

$$f_n'(x) = 0 \iff n^2 = x^2 \iff x = n \qquad (x \in [0,\infty[)$$

Tableau de variation :

x	0		n		∞
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{n}$	$\searrow$	0

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{n^2+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergente
(série harmonique)

f) Sur $[0,a]$, on a cv. normale et donc cv. uniforme. La continuité de f_n implique donc la continuité de S.

Pour la dérivabilité, on reprend

$$f_n'(x) = \frac{2n^2 - 2x^2}{(n^2+x^2)^2}$$

$$f_n''(x) = \frac{(n^2+x^2)(-4x) - 2x \cdot 2 \cdot (2n^2-2x^2)}{(n^2+x^2)^3}$$

$$= \frac{-12n^2 x + 4x^3}{(n^2+x^2)^3} = \frac{4x(x^2-3n^2)}{(n^2+x^2)^3}$$

Seule valeur critique pour f_n' est donc

$x = \sqrt{3}\, n$.

On a $f_n'(0) = \frac{2}{n^2}$; $f_n'(\sqrt{3}\,n) = \frac{-4n^2}{16n^4} = -\frac{1}{4n^2}$

$\lim_{x \to \infty} f_n'(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{-2x^2}{x^4} = 0$

On a donc :

$\|f_n'\|_\infty = \frac{2}{n^2}$ sur $[0, \infty[$

$\sum \frac{2}{n^2}$ est une série de Riemann à l'exposant $2 > 1$, donc convergente.

Alors, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ cv. normalement, donc uniformement, et $\sum f_n(x)$ cv.

On en déduit que S est dérivable et

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 2x^2}{(n^2+x^2)^2}$$

B) 1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ cv. pour $z = i$
dv. pour $z = 1-2i$

$|i| = 1$ et $|1-2i| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

On conclut que $1 \leq R \leq \sqrt{5}$.

2) $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^n n^4 z^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n n^4} = 3 \qquad \left(\lim \sqrt[n]{n} = 1\right)$$

Donc, $R = \frac{1}{3}$.

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+3)! \quad (n!)^3}{((n+1)!)^3 \cdot (3n)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(n+1)(n+1)} = 3\cdot 3\cdot 3 = 27$$

Donc, $R = \frac{1}{27}$.