Analyse pour l'économie 1

Corrigé de Partie 1/2 de l'examen 1, 2018/19

(A) $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x} + x^2}{n+x}$, définie sur $[0,1]$

1) Si $n \to \infty$, x et x^2 sont constantes et ne^{-x} et n tendent vers ∞.

Donc $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{ne^{-x}}{n} = e^{-x} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-x}$

La limite simple existe et égale $\boxed{f(x) = e^{-x}}$

2) $g_n(x) = \dfrac{x^2 - xe^{-x}}{n+x}$ sur $[0,1]$

$$|g_n(x)| \leq \frac{|x^2| + |xe^{-x}|}{n+x} \leq \frac{1^2 + 1 \cdot e^{-0}}{n+0} = \frac{2}{n}$$

Donc, $\sup\limits_{x\in[0,1]} |g_n(x)| \leq \dfrac{2}{n}$

3) $$f_n(x) - f(x) = \frac{ne^{-x} + x^2 - (n+x)e^{-x}}{n+x}$$

$$= \frac{x^2 - xe^{-x}}{n+x} = g_n(x)$$

Par 2), on conclut que $\|f_n - f\|_\infty \leq \dfrac{2}{n} \to 0$, donc $f_n \to f$ uniformement sur $[0,1]$.

4) Comme f_n est une fonction continue, $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ existe et $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$

par l'uniformité de la convergence.

On en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1$$

$$= -e^{-1} + 1 = \boxed{1 - \frac{1}{e}}$$

B) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ et $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$

1) On sait que $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

On trouve pour $x \neq 0$ que

$$\boxed{\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}}$$

On constate que cela donne la valeur 1 pour $x=0$. On a donc bien

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Le rayon de convergence vaut ∞ parce que c'est le cas pour $\sin x$ qu'on a utilisé.

(On pourrait vérifier $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$.)

2) $g(0)=0$ et $g(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$, si $x \neq 0$.

a) Resultat du cours :

À l'intérieur de l'intervalle de convergence, l'intégrale d'une série entière existe et se calcule terme par terme.

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{1}{(2n+1)!}$$

Le rayon de convergence ne change pas par intégration et reste ∞.

(C) $f_n(x) = n x^{\alpha} e^{-nx^2}$, $x \in \,]0,\infty[$, $\alpha > 0$

1) $$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \frac{(n+1)\,\cancel{x^{\alpha}}\,e^{-(\cancel{n}+1)x^2}}{n\,\cancel{x^{\alpha}}\,e^{\cancel{-nx^2}}}$$

$$= \frac{n+1}{n} e^{-x^2} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-x^2} < 1 \text{ pour } x > 0$$

Donc $\sum f_n(x)$ converge simplement par le critère de d'Alembert.

2) $$f_n'(x) = n (x^{\alpha})' e^{-nx^2} + n x^{\alpha} (e^{-nx^2})'$$
$$= n \alpha x^{\alpha-1} e^{-nx^2} + n x^{\alpha} (-2nx) e^{-nx^2}$$
$$= n x^{\alpha-1} e^{-nx^2} (\alpha - 2nx^2)$$

Le seul zéro de la dérivée sur $]0,\infty[$ se trouve donc à $2nx^2 = \alpha$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{\alpha}{2n}$$
$$\overset{x>0}{\Rightarrow} \boxed{x = \sqrt{\frac{\alpha}{2n}}}$$

Tableau de variation :

x	0		$\sqrt{\frac{\alpha}{2n}}$		∞
f_n	0	$\nearrow$	$f_n\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2n}}\right) > 0$	$\searrow$	0

On a utilisé $\lim_{x \to \infty} f_n(x) = 0$ par

croissance comparée de x^α et e^{-nx^2}.

3) $$\sup_{x \in]0,\infty[} |f_n(x)| = \left| f_n\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2n}}\right) \right|$$

$$= n \left(\frac{\alpha}{2n}\right)^{\alpha/2} e^{-n \cdot \frac{\alpha}{2n}}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\alpha/2}}_{\text{const.}} \cdot \frac{1}{n^{\alpha/2 - 1}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{\alpha}{2}}}_{\text{const.}} \quad \text{si } n \to \infty$$

4) $\sum \frac{1}{n^{\alpha/2 - 1}}$ est une série de Riemann

et converge ssi $\frac{\alpha}{2} - 1 > 1 \iff \frac{\alpha}{2} > 2 \iff \underline{\underline{\alpha > 4}}$