Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie

Analyse pour l'économie 1. Examen de seconde session.

21 juin 2017, 16h00-17h30. Salle Thémis 69

- Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé.
- La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1.

1. On considère l'application $N\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $N(x, y) = (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$.
   Calculer $N(1, 0)$, $N(0, 1)$ et $N(1, 1)$.
2. L'application N vérifie-t-elle les axiomes des normes ?

Exercice 2. On considère la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ de terme général

$$f_n(x) = \frac{e^x}{(e^x + n)^2}, \quad \text{avec } n \geq 0 \text{ et } x \in [0, +\infty[.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction notée S.
2. Soit $a > 0$. Étudier la convergence uniforme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur $[0, a]$.
3. Montrer que
$$\int_0^{\ln 2} S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+n)(2+n)}.$$
4. Étudier la continuité et la dérivabilité de S.

Exercice 3. Soit f la fonction qui *« à tout point de $\mathbb{R}^2$ associe la distance euclidienne entre ce point et le point* $(1, 1)$ *»*.

1. Expliciter l'expression $f(x, y)$. (S'assurer du fait que $f(1, 1) = 0$ et $f(0, 0) = \sqrt{2}$, en accord avec la définition de f).
2. Calculer les dérivées partielles de f en précisant où elles existent.
3. Démontrer que ces dérivées partielles sont bornées.
4. Écrire la formule de Taylor d'ordre 1 de f centrée en $(0, 0)$.