Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie

Analyse pour l'économie 1. Examen de seconde session.

29 juin 2018

— Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé.
— La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1.

1. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière qui converge pour $z = e^{i\pi/6}$ et diverge pour $z = \sqrt{2} - 2i$. Que peut-on dire du rayon de de convergence R de cette série ?
2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière suivante (on pourra appliquer le critère de Cauchy) :
$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} 3^n n^{\sqrt{n}} z^n$$

Solution. $1)$ Si une série entière converge pour une valeur z alors $R \geq |z|$. La série converge pour $z = e^{i\pi/6}$ de module 1, donc $R \geq 1$.

Si une série entière diverge pour une valeur de z alors $R \leq |z|$. Ensuite la série diverge pour $z = \sqrt{2} - 2i$ de module $\sqrt{6}$. Donc $R \leq \sqrt{6}$. On a donc $1 \leq R \leq \sqrt{6}$. $2)$ On pose a_n le coefficient de z^n dans la série entière. Les coefficients a_n sont non nuls. On utilise le critère de de Cauchy pour le calcul du rayon de convergence :
$$a_n = 3^n n^{\sqrt{n}} z^n, a_n^{\frac{1}{n}} = 3n^{\frac{\sqrt{n}}{n}} = 3e^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \to 3 \text{ quand } n \to +\infty \Rightarrow R = \frac{1}{3}.$$

Exercice 2. Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On introduit la fonction $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par
$$g(x, y) = f(e^y, e^x).$$

1. Exprimer les dérivées partielles $g_x(x, y)$ et $g_y(x, y)$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. Points stationnaires :
   (a) Supposons que f possède $(0, 0)$ comme seul point stationnaire et que $f(0, 0) = \max_{\mathbb{R}^2} f$. Que peut-on dire des points stationnaires et des extrema de g ?
   (b) Supposons que f possède $(1, 1)$ comme seul point stationnaire et que $f(1, 1) = \min_{\mathbb{R}^2} f$. Que peut-on dire des points stationnaires et des extrema de g ?

Solution. On a $g_x(x, y) = f_y(e^y, e^x)e^x$ et $g_y(x, y) = f_x(e^y, e^x)e^y$. Observons que (x, y) est un point stationnaire de g si et seulement si $g_x(x, y) = g_y(x, y) = 0$. Donc (x, y) est un point stationnaire de g si et seulement si (e^y, e^x) est un point stationnaire de f. En particulier :

(a) si $(0,0)$ est le seul point stationnaire de f, alors g n'a aucun point stationnaire (puisque $(e^y, e^x) \neq (0,0)$ quels que soient x et y). En particulier, g n'a pas d'extrema locaux ou globaux dans $\mathbb{R}^2$.

(b) si $(1,1)$ est le seul point stationnaire de f alors g possède un seul point stationnaire qui est $(0,0)$, puisque $e^0 = 1$ et la fonction exponentielle est injective. De plus, g admet en $(0,0)$ un point de minimum global, et elle n'a pas d'autres extrema (locaux ou globaux) dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Écrire le développement de Taylor d'ordre 2 centré en $(0,0,0)$ d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que

$$f(0,0,0) = 1, \qquad \nabla f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où H est la matrice Hessienne de f à l'origine. Donner ensuite un exemple d'une telle fonction.

Solution. L'application de la Formule de Taylor donne directement

$$f(x,y,z) = 1 + y + 2z + \frac{1}{2}[3x^2 + 6xy] + o(\|(x,y,z)\|^2), \qquad \text{pour } (x,y,z) \to (0,0,0).$$

Un exemple d'une telle fonction est $f(x,y,z) = 1 + y + 2z + \frac{3}{2}x^2 + 3xy$.

Exercice 4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2x^2}.$$

$a)$ Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,+\infty[$.

$b)$ Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ et $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

$c)$ Déduire de $b)$ que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$.

$d)$ Pour $n \geq 1$, donner la valeur de $\|f_n\|_\infty$ avec $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$. (Indication : on pourra étudier les variations de la fonction f_n).

Solution. $a)$ Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Ensuite, pour $x > 0$, à x fixé, l'exponentielle $e^{-n^2x^2}$ l'emporte sur les puissances de n et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} 2n^2 x e^{-n^2x^2} = 0.$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = 0, \forall x \in [0,+\infty[$. $b)$ On a

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx = [-e^{-n^2x^2}]_0^1 = 1 - e^{-n^2}.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 1.$$

$c)$ Si f_n convergeait uniformément vers f sur $[0, +\infty[$, on aurait, d'après le théorème d'intégration appliqué à la suite de fonctions continue f_n :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

Donc f_n ne convergence pas uniformément vers f sur $[0, +\infty[$. $d)$ On a

$$f_n'(x) = 2n^2 e^{-n^2x^2} - 4n^4x^2e^{-n^2x^2} = 2n^2(1 - 2n^2x^2)e^{-n^2x^2}.$$

On en déduit que f_n est croissante sur $[0, \frac{1}{\sqrt{2}n}]$, décroissante sur $[\frac{1}{\sqrt{2}n}, +\infty[$ avec

$$f_n(0) = 0,\ f_n(\frac{1}{\sqrt{2}n}) = \sqrt{2}ne^{-1/2},\ \lim_{x\to+\infty} 2n^2xe^{-n^2x^2} = 0.$$

De l'étude des variations de f_n, on déduit que

$$\|f_n\|_\infty = \sqrt{2}ne^{-1/2}.$$