Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie

Analyse pour l'économie 1. Examen de seconde session.

29 juin 2018. Durée 1h30.

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1.

1. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière qui converge pour $z = e^{i\pi/6}$ et diverge pour $z = \sqrt{2} - 2i$. Que peut-on dire du rayon de de convergence R de cette série ?
2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière suivante (on pourra appliquer le critère de Cauchy) :

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} 3^n n^{\sqrt{n}} z^n$$

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On introduit la fonction $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$g(x, y) = f(e^y, e^x).$$

1. Exprimer les dérivées partielles $g_x(x, y)$ et $g_y(x, y)$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. Points stationnaires :
   (a) Supposons que f possède $(0, 0)$ comme seul point stationnaire et que $f(0, 0) = \max_{\mathbb{R}^2} f$. Que peut-on dire des points stationnaires et des extrema de g ?
   (b) Supposons que f possède $(1, 1)$ comme seul point stationnaire et que $f(1, 1) = \min_{\mathbb{R}^2} f$. Que peut-on dire des points stationnaires et des extrema de g ?

Exercice 3. Écrire le développement de Taylor d'ordre 2 centré en $(0, 0, 0)$ d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que

$$f(0,0,0) = 1, \qquad \nabla f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où H est la matrice Hessienne de f à l'origine. Donner ensuite un exemple d'une telle fonction.

Exercice 4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2 x^2}.$$

$a)$ Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, +\infty[$.

$b)$ Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx$ et $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

$c)$ Déduire de $b)$ que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

$d)$ Pour $n \geq 1$, donner la valeur de $\|f_n\|_\infty$ avec $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$. (Indication : on pourra étudier les variations de la fonction f_n).