① 1) On calcule, en tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3 - 3y^2$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -6xy$

Les points stationnaires sont donc les $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ solutions de :

$$\begin{cases} x^2-y^2-1=0 \\ xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-y^2-1=0 \\ x=0 \text{ ou } y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -y^2-1=0 \\ x=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2-1=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Le premier système n'a pas de solutions réelles ; le second en a deux, à savoir $(1,0)$ et $(-1,0)$.

2)a) On calcule, en tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = -6y$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6x$

Au point $(1,0)$, la hessienne est donc : $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

b) Cette hessienne est de déterminant strictement négatif : le point $(1,0)$ est donc "point-col" (ou "point selle") et f ne peut y admettre un extremum local.

c) On observe que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(-x,y) = -f(x,y)$. Le comportement de f autour de $(-1,0)$ est donc le même qu'autour de $(1,0)$; là encore point-col, et pas d'extremum même local.

3) a) K est un disque fermé, borné de façon évidente (tous ses points sont à distance inférieure ou égale à 4 de l'origine), fermé car défini à l'aide d'une inégalité large et d'une formule représentant une fonction continue.

b) C'est le théorème de Weierstrass

c) Par le b), $m \leq f(x,y) \leq M$. Si on avait $f(x,y) = m$, $f_{|D}$ admettrait un minimum (et a fortiori un minimum local) en (x,y). Comme D est ouvert, ce serait aussi le cas de f. Donc (x,y) serait stationnaire, donc égal à $(\pm 1, 0)$. Or en ces points, vu le 2, f n'admet pas de minimum local. On en déduit que $m < f(x,y)$. On traite de même M.

d) Les valeurs prises par φ sont exactement celles prises par f sur $K\setminus D$, bord de K.

On calcule $\varphi(t) = f(2\cos t, 2\sin t) = 8\cos^3 t - 6\cos t\,(1 + 4\sin^2 t)$

$$= 8\cos^3 t - 6\cos t - 24\sin^2 t\cos t$$
$$= 8\cos^3 t - 6\cos t - 24(1-\cos^2 t)\cos t$$
$$= 32\cos^3 t - 30\cos t$$
$$= 2\cos t\,(16\cos^2 t - 15)$$

puis on calcule $\varphi'(t) = -96 \sin t \cos^2 t + 30 \sin t$

$= -6 \sin t \,(16 \cos^2 t - 5)$

φ' s'annule en les réels t pour lesquels $\cos t = \pm 1$ et ceux pour lesquels $\cos t = \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$

En les premiers, $\varphi(t)$ vaut $\pm 2 \,(16 - 15) = \pm 2$

En les seconds, il vaut $\pm \frac{\sqrt{5}}{2} (5 - 15) = \pm 5\sqrt{5}$

Le maximum atteint par f est alors égal au maximum atteint par φ, forcément valeur critique de φ,

donc $M = \mathrm{Max}(-5\sqrt{5}, -2, 2, 5\sqrt{5}) = 5\sqrt{5}$

De même $m = -5\sqrt{5}$

(2) 1) Pour y (non nul) fixé quand $x \to 0$ $\quad g(x,y) \to g(0,y) = \frac{2y^2}{y^2} = 2$

donc $\lim\limits_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} \left(\lim\limits_{x \to 0} g(x,y) \right) = 2$

De même $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left(\lim\limits_{y \to 0} g(x,y) \right) = 1$

elles sont distinctes, donc g n'admet pas de limite

2) Pour $s \neq 0$ On calcule $h(s,0) = s$ d'où $\lim\limits_{\substack{s \to 0 \\ s \neq 0}} h(s,0) = 0$

Pour $t \neq 0$ $\quad h(t,t) = \frac{2t^3 + t^2}{t^4 + 2t^2} \sim \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$ quand $t \to 0$

d'où $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} h(t,t) = \frac{1}{2}$

Ces limites sont distinctes, la fonction h n'a donc pas de limite en $(0,0)$

3) Pour $(x,y) \neq (0,0)$ $\quad 0 < x^2 + y^2 \leq x^2 + x^2y^2 + y^2$ donc $0 < \frac{1}{x^2 + x^2y^2 + y^2} \leq \frac{1}{x^2 + y^2}$

et $\quad 0 \leq |x^3 + y^3| \leq |x|^3 + |y|^3$. En multipliant entre elles ces inégalités,

on obtient : $0 \leq |k(x,y)| \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2}$. On passe alors en polaires en notant

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, donc $0 \leq |x| \leq r$ et $0 \leq |y| \leq r$ puis $0 \leq |x|^3 + |y|^3 \leq 2r^3$

donc $0 \leq |k(x,y)| \leq \frac{2r^3}{r^2} = 2r$. Par "les gendarmes", on conclut que $k(x,y) \to 0$ quand $(x,y) \to (0,0)$.