Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
Mercredi 9 Janvier 2019, 14h00
Amphi Caullery

Analyse pour l'économie 1. Partie 1/2

Utiliser la copie N. 1 pour composer cette partie du sujet

- La durée de totale de l'epreuve (partie 1 + partie 2) est de 2 heures.

- Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé.

- La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice A. Suites de fonctions. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{n\,\mathrm{e}^{-x} + x^2}{n+x}.$$

1) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.

2) On pose

$$g_n(x) = \frac{x^2 - x\,\mathrm{e}^{-x}}{n+x}.$$

Montrer que (on pourra utiliser l'inégalité triangulaire) :

$$\sup_{x\in[0,1]} |g_n(x)| \leq \frac{2}{n}.$$

3) Vérifier que $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$, et en déduire que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément dans $[0,1]$ vers la fonction f.

4) En déduire, sans calculer la valeur de u_n, que la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_n = \int_0^1 \frac{n\,\mathrm{e}^{-x} + x^2}{n+x}\,dx$$

converge et calculer sa limite.

Exercice B. Séries entières. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(0) = 1 \ et \ f(x) = \frac{\sin x}{x} \ si \ x \neq 0.$$

1) Monter que f est développable en série entière et donner son développement en série entière. On précisera le rayon de convergence.

2) On pose pour $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = 0 \ si \ x = 0 \ et \ g(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt, \ si \ x \neq 0.$$

$a)$ Montrer que $g(x)$ est bien définie.

$b)$ Monter que g est développable en série entière et donner son développement en série entière. On précisera le rayon de convergence.

Exercice C. Séries de fonctions. On considère la série de fonctions de terme général

$$f_n(x) = n x^{\alpha}\, \mathrm{e}^{-nx^2}$$

définie pour $x \in]0, +\infty[$ et où $\alpha > 0$.

1) En utilisant le critère de d'Alembert, montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$. On note S sa somme.

2) Calculer la dérivée de f_n et en déduire que la fonction f_n admet un maximum en

$$x_n = \sqrt{\frac{\alpha}{2n}}.$$

3) Calculer $\sup_{x \in]0,+\infty]} |f_n(x)|$.

4) Pour quelles valeurs de α la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est-elle normalement convergente sur $]0, +\infty[$?

Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
Mercredi 9 Janvier 2019, 14h00 Amphi Caullery

Analyse pour l'économie 1. Partie 2/2

Utiliser la copie N. 2 pour composer cette partie du sujet

- La durée de totale de l'epreuve (partie 1 + partie 2) est de 2 heures.
- Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé.
- La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1

Dans cet exercice on note f l'application de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$ définie par :

$$f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2).$$

On note par ailleurs D et K les parties suivantes de $\mathbf{R}^2$:

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4\} \text{ et } K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4\}.$$

1) Prouver que les points stationnaires (autrement dit les points critiques) de f dans $\mathbf{R}^2$ sont les points $(1,0)$ et $(-1,0)$ et eux seuls.

2) a) Expliciter la matrice hessienne de f au point $(1,0)$.

b) La fonction f admet-elle un extremum local en ce point $(1,0)$?

c) En exploitant une symétrie de f, déterminer si celle-ci admet ou non un extremum local au point $(-1,0)$.

3) a) Justifier sommairement que K est compact.

b) Justifier pourquoi la restriction de f à K admet un minimum global, qu'on notera m dans la suite, et un maximum global, qu'on notera M.

c) Soit $(x,y) \in D$. En utilisant la question 2, montrer que $m < f(x,y) < M$.

d) Pour t réel, on pose $\varphi(t) = f(2\cos t, 2\sin t)$. En étudiant la fonction φ, déterminer les valeurs de m et M. (Il est recommandé de commencer par fournir une expression de φ ne faisant pas apparaître la fonction sinus).

Exercice 2

Les trois fonctions figurant dans cet exercice sont définies sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1) On note g définie par $g(x,y) = \dfrac{x^2+xy+2y^2}{x^2+x^2y^2+y^2}$. Calculer successivement :

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \left(\lim_{x\to 0} g(x,y)\right) \text{ et } \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left(\lim_{y\to 0} g(x,y)\right).$$

La fonction g admet-elle une limite en $(0,0)$?

2) On note h définie par $h(x,y) = \dfrac{x^3+xy+y^3}{x^2+x^2y^2+y^2}$. Calculer successivement :

$$\lim_{\substack{s\to 0\\ s\neq 0}} h(s,0) \text{ et } \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} h(t,t).$$

La fonction h admet-elle une limite en $(0,0)$?

3) On note k définie par $k(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+x^2y^2+y^2}$.

Montrer que la fonction k admet une limite en $(0,0)$. On pourra utiliser (en la justifiant) la majoration : $|k(x,y)| \leq \dfrac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2}$.