Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie

Analyse pour l'économie 1. Examen de seconde session.

Juin 2020. Durée 1h30.

La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y - xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Démontrer que f admet une dérivée directionnelle à l'origine le long toute direction v de $\mathbb{R}^2$ et calculer $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$.

Exercice 2.

1. Calculer le rayon de convergence des séries entières $\sum nx^n$ et $\sum n^2x^n$.
2. En appliquant la formule de dérivation à la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, calculer les sommes des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n,$$

en précisant pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ ces séries sont convergentes.

3. Déduire de ce qui précède les sommes des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2^n}.$$

Exercice 3. On considère la fonction $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, où $g(x,y) = x^2y^2(x+2y-5)$.

1. Démontrer que g n'a pas d'extremum global dans $\mathbb{R}^2$.
2. Trouver le seul point critique de g qui n'est pas situé sur les axes x ou y.
3. Ecrire la matrice hessienne de g en ce point et en déduire la nature.
4. Donner la nature du point critique $(0,0)$.

Exercice 4. Établir si l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} \cos(e^x)\,\mathrm{d}x$$

est convergente. On pourra effectuer d'abord le changement de variables $y = e^x$ et procéder ensuite avec une intégration par parties.