Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2020-2021

Analyse 1 - Mateco 13 janvier 2021. Durée : 2 heures

CONTRÔLE TERMINAL

Pas de documents, pas de téléphones, pas de calculettes !

Exercice 1

1) On note M la fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par $M(x,y) = \mathrm{Min}(|x|,|y|)$.

Montrer que M n'est pas une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2) On note N la fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par $N(x,y) = |x| + 5|y|$.

Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

On note G la fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par $G(r,s,t) = r^2 + s^2 + t^2$

On note f, g et h les fonctions de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définies par $f(u,v) = u + e^v$, $g(u,v) = u^3 v$ et $h(u,v) = \cos(u+v)$.

On note F la fonction de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$F(x,y,z) = (f(y,z), g(z,x), h(x,y))$$

Enfin on note H la fonction de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$H(x,y,z) = G(f(y,z), g(z,x), h(x,y))$$

1) Pour $(r,s,t) \in \mathbb{R}^3$, calculer la matrice jacobienne $J_G(r,s,t)$.

2) Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, expliciter $F(x,y,z)$ puis calculer la matrice jacobienne $J_F(x,y,z)$.

3) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Déduire des deux questions précédentes une expression de $\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y,z)$.

Exercice 3

On note u la fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$u(x,y) = xye^{-x-y}.$$

1) Calculer les dérivées partielles premières et secondes de u sur $\mathbb{R}^2$.

2) Déterminer les points critiques de u.

3) a) Écrire la hessienne de u en chacun de ces points critiques.

b) Préciser la nature de chacun de ces points critiques (la fonction étudiée y admet-elle ou non un extremum local ?)

c) En quels points la fonction u admet-elle un extremum local ?

Exercice 4

1) Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\, dt$ et calculer sa valeur.

2) Sans chercher à la calculer, discuter de la convergence ou de la divergence de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \sqrt{t}}\, dt.$$

Exercice 5

Pour chaque $n \geq 1$ on note f_n la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = e^{-x^2/n}$.

1) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$?

2) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$? Sur $[1, +\infty[$?

Exercice 6

Pour chaque $n \geq 0$ on note u_n la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{3^n}$.

On s'intéresse à la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ dont la somme sera notée S.

1) La série $\sum u_n$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$? normalement sur $\mathbb{R}$? uniformément sur $\mathbb{R}$?

2) La fonction S est-elle continue sur son ensemble de définition ?

3) Calculer les réels $S(0)$ et $S\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 7

1) On considère la série entière d'une variable réelle x :

$$\sum_{n \geq 1} n^n x^n$$

a) Déterminer son rayon de convergence.

b) Déterminer l'ensemble des réels x en lesquels cette série entière converge.

2) Mêmes questions pour la série entière :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{8^{n-5} x^{3n}}{(2n+3)^2}$$