Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie

Analyse pour l'économie 1. Examen de session 1

05/01/2022 - 10h00-12h00. Salle Grignard-s02

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (x^2+y^2)\exp(-x)$.

1. Trouver les points critiques de f dans $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la nature des points critiques. Montrer que f possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle ne possède pas de maximum global.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}.$$

Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum f_n$.

Exercice 3. Pour $-1 < x < 1$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

1. Expliciter la valeur de $S(x)$. Calculer ensuite $S'(x)$, $S''(x)$ et les écrire comme la somme d'une série entière.
2. Calculer les sommes
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

Exercice 4. Déterminer la nature de l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-at}}{1+e^t}\,dt$$

selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. On considère l'application $N\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, définie par

$$N(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + |z|.$$

Démontrer que l'application N est une norme sur $\mathbb{R}^3$. On pourra se servir du fait que l'application $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

T.S.V.P.

Exercice 6. Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \max(x, y)$.

1. Étudier l'existence et, si possible, calculer les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1), \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(2,2).$$

2. Calculer, si elles existent, les dérivées directionnelles

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,1), \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,2), \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,2).$$

où $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$.