

## Analyse pour l'économie 1. Session 2

- La durée de totale de l'épreuve (partie 1 + partie 2) est de 1h30.
- Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve.

**Exercice 1.** Écrire le développement limité d'ordre 2 centré en  $(0, 0)$  de la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = \exp(\cos(x + 3y)).$$

**Exercice 2.**

1. Pour quelles valeurs de  $x \in \mathbb{R}$  la série entière suivante est-elle convergente ?

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2 + (-1)^n)^n x^n.$$

2. Calculer la somme de cette série.

**Exercice 3.** Soit  $a \geq 0$ . On définit la suite de fonctions  $(f_n)$  sur l'intervalle  $[0, 1]$  par

$$f_n(x) = n^a x^n (1 - x).$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ .
2. Préciser les valeurs du paramètre  $a \geq 0$  pour lesquelles la convergence est uniforme sur  $[0, 1]$ .
3. Préciser les valeurs du paramètre  $a \geq 0$  pour lesquelles  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0$ .

**Exercice 4.**

1. Calculer, pour  $a \in \mathbb{R}$ , l'intégrale impropre  $\int_a^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ .
2. En utilisant une comparaison entre série et intégrales intégrales impropres, trouver un réel  $A > 0$  tel que

$$A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \leq 2A.$$

**Exercice 5.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On dit qu'une fonction  $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , est *homogène de degré*  $\alpha$  si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall \lambda > 0 : f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x). \quad (\text{H})$$

1. Pour  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  fixé on définit la fonction  $g(\lambda) = f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ , où  $\lambda > 0$ . Exprimer  $g'(\lambda)$  à l'aide des dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ .
2. Dériver terme-à-terme l'égalité (H) par rapport à  $\lambda$ . En déduire ensuite l'égalité d'Euler

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha f(x).$$