Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie

Analyse pour l'économie 1. Examen de session 1.

3 janvier 2023. Durée 2h.

- Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé.
- La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1.

1. On considère l'application $N \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $N(x,y) = (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$.
   Calculer $N(1,0)$, $N(0,1)$ et $N(1,1)$.
2. L'application N vérifie-t-elle tous les axiomes des normes ?

Correction

1. $N(1,0) = N(0,1) = 1$ et $N(1,1) = 4$
2. L'inégalité triangulaire n'est pas vérifiée car $N(1,1) > N(0,1) + N(1,0)$.

Exercice 2.

1. Calculer le rayon de convergence R de la série entière
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)\,2^n}\,x^n.$$
2. La série est-elle convergente pour $x = R$?
3. La série est-elle convergente pour $x = -R$?
4. On pourrait calculer la somme de cette série entière pour $-R < x < R$. Comment ?
   (On ne demande pas de faire ce calcul, mais plutôt de suggérer une méthode).

Correction

1. En notant a_n le terme devant x^n de la série entière et en remarquant que celui-ci ne s'annule pas on a :
$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{3^n(n+2)2^{n+1}}{(n+1)2^n3^{n+1}} = \frac{2(n+2)}{3(n+1)} \to_{n\to\infty} \frac{2}{3},$$
   d'où un rayon de convergence de $2/3$.
2. Pour $x = R$ on se retrouve avec $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$. Il s'agit de la série de Riemann d'exposant 1 donc divergente.
3. Pour $x = -R$ on se retrouve avec $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$. On vérifie bien que les signes alternent et la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant : par le critère des séries alternées, la série converge.

4. À partir de la formule donnant la somme de la série géométrique de raison $3t/2$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3t/2)^n = \frac{1}{1-3t/2}, \qquad -2/3 < t < 2/3,$$

on calcule terme-à-terme $\int_0^x \dots\, dx$ dans cette expression, pour $-2/3 < x < 2/3$. Pour le terme de gauche le calcul se fait en échangeant la série avec l'intégrale.

Exercice 3. Soit $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x,y) = f(x^2+2xy+y^2, x^2-4x+1),$$

où $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

1. Exprimer les dérivées partielles de F à l'aide des dérivées partielles de f.
2. Calculer $\nabla F(2,-2)$.

Correction

1. En appliquant la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^2+2xy+y^2, x^2-4x+1)\,(2x+2y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^2+2xy+y^2, x^2-4x+1)\,(2x-4).$$

et de même
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^2+2xy+y^2, x^2-4x+1)\,(2x+2y)$$

2. En particulier, les deux dérivées partielles de F s'annulent au point $(2,-2)$.
Donc $\nabla F(2,-2) = (0,0)$.

Exercice 4. On considère la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ de terme général

$$f_n(x) = \frac{e^x}{(e^x+n)^2}, \quad \text{avec } n \geq 0 \text{ et } x \in [0,+\infty[.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers une fonction notée S.
2. Calculer $f_n(\ln n)$ et étudier la nature de la série $\sum f_n(\ln n)$.

3. À l'aide de la question précédente, dire si la série $\sum f_n$ est normalement convergente, sur l'intervalle $[0,\infty[$.
4. Soit $a > 0$. Étudier la convergence normale de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur $[0,a]$.
5. Montrer que

$$\int_0^{\ln 2} S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+n)(2+n)}.$$

Correction

1. A x fixé nous avons $f_n(x) \sim_{n\to\infty} e^x/n^2$ donc on a bien convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ simplement sur $[0,\infty[$, par comparaison avec la série de Riemann d'exposant 2.
2. $f_n(\ln n) = n/4n^2 = 1/(4n)$ donc la série $\sum f_n(\ln n)$ qui est multiple de la série de Riemann d'exposant 1 diverge.
3. Sur $[0,\infty[$, on a $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,\infty[} |f_n(x)| \geq f_n(\ln n) = 1/(4n)$. Par comparaison $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge et alors la série $\sum f_n$ n'est pas normalement convergente sur $[0\infty[$.
4. Sur $[0,a]$, pour tout n on a $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)| \leq e^a/n^2$. Par comparaison avec la série de Riemann d'exposant 2, $\sum f_n$ est bien normalement convergente sur $[0,a]$.
5. D'après la question précédente (avec $a = \ln 2$), $\sum f_n$ est uniformément convergente sur $[0,\ln 2]$. On peut faire l'interversion série-intégrale et conclure (en passant par le changement de variable $y = e^x$) que :

$$\int_0^{\ln 2} S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{(e^x+n)^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_1^2 \frac{\mathrm{d}y}{(y+n)^2}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+n)(2+n)}.$$

Exercice 5. Soit f la fonction qui *« à tout point de $\mathbb{R}^2$ associe la distance euclidienne entre ce point et le point* $(-1,-1)$ *»*.

1. Expliciter, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'expression $f(x,y)$. (S'assurer du fait que $f(0,0) = \sqrt{2}$, en accord avec la définition de f).
2. Calculer les dérivées partielles de f en tout point $(x,y) \neq (-1,-1)$ de $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer les dérivées directionnelles $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ de f à l'origine, le long toute direction $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$.
4. Quel est le vecteur unitaire $\vec{v}$ qui maximise $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$?

Correction

1. $f(x,y) = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$.
2. Par la formule de la dérivée de la composée, on a :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}} \cdot (2(x+1)) = \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}}.$$
De même :
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y+1}{\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}}.$$
3. Pour $(x,y) = (0,0)$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = v_1\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + v_2\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{v_1 + v_2}{\sqrt{2}}.$$
4. Pour maximiser cette expression parmi tous les vecteurs unitaires $\vec{v}$, on cherche la direction parallèle à $\nabla f(0,0)$. Il suffit de prendre la direction $\vec{v}$ telle que $v_1 = v_2 = 1/\sqrt{2}$.