Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie

Analyse pour l'économie 1. Examen de session 1.

3 janvier 2023. Durée 2h.

- Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé.
- La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1.

1. On considère l'application $N\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $N(x,y) = (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$.
   Calculer $N(1,0)$, $N(0,1)$ et $N(1,1)$.
2. L'application N vérifie-t-elle tous les axiomes des normes ?

Exercice 2.

1. Calculer le rayon de convergence R de la série entière
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)\,2^n}\, x^n.$$
2. La série est-elle convergente pour $x = R$?
3. La série est-elle convergente pour $x = -R$?
4. On pourrait calculer la somme de cette série entière pour $-R < x < R$. Comment ?
   (On ne demande pas de faire ce calcul, mais plutôt de suggérer une méthode).

Exercice 3. Soit $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$F(x,y) = f(x^2 + 2xy + y^2, x^2 - 4x + 1),$$
où $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

1. Exprimer les dérivées partielles de F à l'aide des dérivées partielles de f.
2. Calculer $\nabla F(2,-2)$.

T.S.V.P.

Exercice 4. On considère la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ de terme général

$$f_n(x) = \frac{e^x}{(e^x+n)^2}, \quad \text{avec } n \geq 0 \text{ et } x \in [0,+\infty[.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers une fonction notée S.
2. Calculer $f_n(\ln n)$ et étudier la nature de la série $\sum f_n(\ln n)$.
3. À l'aide de la question précédente, dire si la série $\sum f_n$ est normalement convergente, sur l'intervalle $[0,\infty[$.
4. Soit $a > 0$. Étudier la convergence normale de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur $[0,a]$.
5. Montrer que
$$\int_0^{\ln 2} S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+n)(2+n)}.$$

Exercice 5. Soit f la fonction qui *« à tout point de* $\mathbb{R}^2$ *associe la distance euclidienne entre ce point et le point* $(-1,-1)$ ».

1. Expliciter, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'expression $f(x,y)$. (S'assurer du fait que $f(0,0) = \sqrt{2}$, en accord avec la définition de f).
2. Calculer les dérivées partielles de f en tout point $(x,y) \neq (-1,-1)$ de $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer les dérivées directionnelles $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ de f à l'origine, le long toute direction $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$.
4. Quel est le vecteur unitaire $\vec{v}$ qui maximise $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$?