Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie

Analyse pour l'économie 1. Examen de session 2.

Juin 2023. Durée 1h30.

— Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé.
— La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1.

1 1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière.
1 2. Donner un exemple d'une série entière de rayon de convergence $R = 2$.
1 3. Quel est le développement en série entière de la fonction $f(x) = \exp(-x^2)$?

Exercice 2. Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$, où $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$, avec $x \in \mathbb{R}$.

1 1. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$.
2 2. Étudier la convergence uniforme de la suite de $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$.
(On pourra se servir de l'égalité $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.)
2 3. Étudier la convergence simple de la suite des dérivées $(f'_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$.
1 4. Étudier la convergence uniforme de $(f'_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$.
1 5. Calculer, sans chercher une primitive de f_n,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3. Soit $f(x, y) = 1 + 2x + |y|^{3/2}$.

2 1. Calculer $\nabla f(1, 4)$ et ensuite $\|\nabla f(1, 4)\|$.
2 2. Calculer la dérivée directionnelle de f au point $(1, 4)$, le long de la direction du vecteur $\nabla f(1, 4)$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Posons

$$F(x, y) = f\big(\sin(x - 2y), xy\big).$$

4 1. Exprimer, en tout point (x, y), les dérivées partielles de F à l'aide de celles de f.
2 2. Supposons que $\nabla f(0, 2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer, à l'aide de la formule trouvée à la question précédente, $\frac{\partial F}{\partial y}(2, 1)$.

① 1) Le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est $\boxed{R := \sup\{r \geq 0 \ \ (|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est borné}\}}$

2) $\sum \frac{x^n}{2^n}$ est de rayon de c.v. $\boxed{R=2}$

3) $\exp(-x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

② 1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) = \sqrt{x^2} = \boxed{|x|}$

2) Mq $f_n \to f$ unif sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$: $|f_n(x) - f(x)| = \sqrt{\frac{1}{n}+x^2} - \sqrt{x^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+x^2}+\sqrt{x^2}}$

$\leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+nx^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$

Donc $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ et $\boxed{\text{la convergence est uniforme}}$ sur $\mathbb{R}$.

3) $f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{n}+x^2}} \longrightarrow \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases} = \boxed{\begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}}$

4) La convergence de (f_n') $\boxed{\text{n'est pas uniforme}}$ puisque la limite simple de (f_n') est une fonction discontinue, alors que $\forall n$ f_n' est continue sur $\mathbb{R}$.

5) $\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} |x|\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = \boxed{1}$

grâce à la c.v. uniforme.

③ $f(x,y) = 1+2x+|y|^{3/2}$. Au voisinage de $(1,4)$ f coïncide avec la fonction de classe C^1 $g(x,y) = 1+2x+y^{3/2}$.

Donc $\nabla f(1,4) = \nabla g(1,4) = \begin{pmatrix} g_x(1,4) \\ g_y(1,4) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$ puisque $g_y(x,y) = \frac{3}{2} y^{1/2}$.

$\|\nabla f(1,4)\| = \sqrt{4+9} = \boxed{\sqrt{13}.}$

Soit $\vec{v}$ la direction $\vec{v} = \frac{2}{\sqrt{13}} \vec{i} + \frac{3}{\sqrt{13}} \vec{j}$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,4) = \frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(1,4) = \vec{v} \cdot \nabla g(1,4) = \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot 2 + \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot 3 = \frac{13}{\sqrt{13}} = \boxed{\sqrt{13}}.$

④ $\boxed{\begin{aligned} F_x(x,y) &= f_x(\sin(x-2y), xy)\cos(x-2y) + f_y(\sin(x-2y), xy)\,y \\ F_y(x,y) &= f_x(\sin(x-2y), xy)(-2)\cos(x-2y) + f_y(\sin(x-2y), xy)\,x \end{aligned}}$

Donc:
$F_y(2,1) = 3(-2)\cos 0 + 4 \cdot 2 = \boxed{2}$