Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie

Analyse pour l'économie 1. Examen de session 2.

Juin 2023. Durée 1h30.

— Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé.
— La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1.

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière.
2. Donner un exemple d'une série entière de rayon de convergence $R = 2$.
3. Quel est le développement en série entière de la fonction $f(x) = \exp(-x^2)$?

Exercice 2. Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$, où $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$, avec $x \in \mathbb{R}$.

1. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite de $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$.
   (On pourra se servir de l'égalité $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.)
3. Étudier la convergence simple de la suite des dérivées $(f_n')_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$.
4. Étudier la convergence uniforme de $(f_n')_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$.
5. Calculer, sans chercher une primitive de f_n,
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3. Soit $f(x, y) = 1 + 2x + |y|^{3/2}$.

1. Calculer $\nabla f(1, 4)$ et ensuite $\|\nabla f(1, 4)\|$.
2. Calculer la dérivée directionnelle de f au point $(1, 4)$, le long de la direction du vecteur $\nabla f(1, 4)$.

Exercice 4. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Posons
$$F(x, y) = f\big(\sin(x - 2y), xy\big).$$

1. Exprimer, en tout point (x, y), les dérivées partielles de F à l'aide de celles de f.
2. Supposons que $\nabla f(0, 2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer, à l'aide de la formule trouvée à la question précédente, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(2, 1)$.