Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
Mercredi 4 Janvier 2017

Analyse pour l'économie 1. Partie 1/2

Utiliser la copie N. 1 pour composer cette partie du sujet

- La durée de totale de l'epreuve (partie 1 + partie 2) est de 2 heures.

- Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé.

- La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1.

On considère la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ de terme général

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + n)^2}, \text{avec } n \geq 0 \text{ et } x \in [0, +\infty[.$$

a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction notée S.

b) Soit $a > 0$, étudier la convergence uniforme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur $[0, a]$.

c) Montrer que

$$\int_0^{\ln 2} S(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+n)(2+n)}.$$

d) Etudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur $[0, +\infty[$.

e) Etudier la continuité et la dérivabilité de S.

Exercice 2.

a) Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière qui converge pour $z = 1 + i$ et diverge pour $z = 1 - i$. Donner le rayon de convergence R de cette série.

b) Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^2} z^n, \;\; f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n.$$

Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
4 Janvier 2017

Analyse pour l'économie 1. Partie 2/2

Utiliser la copie N. 2 pour composer cette partie du sujet

- La durée de totale de l'epreuve (partie 1 + partie 2) est de 2 heures.
- Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé.
- La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1. Écrire le développement limité d'ordre 2 centré en $(0,0)$ de la fonction

$$f(x,y) = \exp(x^2 + y).$$

Exercice 2. Considérons la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x,y) = x^2 + y^3 - 2xy - y.$$

1. Déterminer les 2 points stationnaires de f et en donner la nature.
2. La fonction f possède-t-elle de minimum ou de maximum absolu dans $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, de classe C^1, est *homogène de degré* α si

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ \forall \lambda > 0\ :\quad f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x). \tag{H}$$

1. Démontrer que les fonctions suivantes sont homogènes et en préciser le dégré d'homogénéité :
$$x \mapsto \|x\|_2^2, \qquad x \mapsto \frac{x_1 + \cdots + x_n}{\|x\|_2},$$
2. Pour $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ fixé on définit la fonction $g(\lambda) = f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$, où $\lambda > 0$. Exprimer $g'(\lambda)$ à l'aide des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.
3. Dériver terme-à-terme l'égalité (H) par rapport à λ. En déduire ensuite l'égalité d'Euler
$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha f(x).$$