Séries

① Généralités

Abréviation : "$\sum$" sans indices abrège "la série de terme général"

<u>Def</u> : pour (u_n) suite de réels (ou complexes) notons $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

Lorsque (U_n) possède une limite finie S on dit que $\sum u_n$ converge.

Le nombre S est appelé somme de la série et noté $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$

Lorsque (U_n) n'a pas de limite finie, on dit que $\sum u_n$ diverge

<u>Exemple fondamental</u> $u_n = q^n$ où $|q|<1$. Alors $\sum u_n$ CV ~~de~~ somme $\frac{1}{1-q}$

<u>Prop</u> $\sum u_n \text{ CV} \Rightarrow u_n \to 0$

[et, par contraposition, $u_n \not\to 0 \Rightarrow \sum u_n \text{ DV}$]

② Séries à termes positifs

Si pour tout n, $u_n \geq 0$ la suite (U_n) et croissante. Dans cette situation, si elle n'a pas de limite finie elle tend vers $+\infty$ et on peut éventuellement écrire $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = +\infty$.

(2-1) Comparaison séries/intégrales

<u>Th</u> : soit f continue sur $[0,+\infty[$, avec $f \searrow$ et $\lim_{+\infty} f = 0$

Alors $\int^{+\infty} f$ et $\sum f(n)$ ont même nature

<u>Exemples fondamentaux</u> $a \in \mathbb{R}$ fixé, $\sum \frac{1}{n^a} \text{ CV} \Leftrightarrow 1 < a$

(2-2) Comparaison de séries entre elles

<u>Th</u> : soit (u_n) et (v_n) à termes positifs

* si $u_n \sim v_n$ $\quad \sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature
* si $u_n = o(v_n)$ $\quad \sum v_n \text{ CV} \Rightarrow \sum u_n \text{ CV}$

[et, par contraposition, $\sum u_n \text{ DV} \Rightarrow \sum v_n \text{ DV}$]

2-3 D'Alembert et Cauchy

Prop : on suppose $* \forall n, u_n > 0$

$* \frac{u_{n+1}}{u_n} \to l$

$* l < 1$

Alors $\sum u_n$ CV

Prop : on suppose : $* \forall n, u_n \geq 0$

$* \sqrt[n]{u_n} \to l$

$* l < 1$

Alors $\sum u_n$ CV

3 Séries sans hypothèse de signe

3-1 Le sandwiche

Th : si pour tout n, $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\sum a_n$ CV et $\sum c_n$ CV alors $\sum b_n$ CV

3-2 Convergence absolue

Def : pour u_n suite de réels (ou complexes) on dit que $\sum u_n$ CVA lorsque $\sum |u_n|$ CV

Prop : CVA $\Longrightarrow$ CV

3-3 Critère des séries alternées

Prop : soit (v_n) suite avec $v_n \searrow$ et $\lim\limits_{+\infty} v_n = 0$

Alors $\sum (-1)^n v_n$ CV.