Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
Novembre 2023

Analyse pour l'économie 1. Partiel 2023

Durée 1h30. Documents non autorisés

3 **Question de cours.** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Démontrer que si $\sum x_n$ converge, alors $x_n \to 0$. Montrer, à l'aide d'un exemple, que la réciproque n'est pas vraie en général.

Exercice 1.

2 1. Calculer la valeur des intégrales impropres suivantes

$$\int_0^2 \frac{2}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t, \qquad \int_0^\infty t\exp(-t)\,\mathrm{d}t.$$

3 2. Calculer les sommes des séries

$$\sum_{n=4}^{\infty}\Big(\frac{1}{4}\Big)^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(u_n - u_{n+2}),$$

où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, telle que $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_n \to 3$.

2 3. Construire un exemple d'une fonction continue $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, non identiquement nulle, telle que $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction telle que, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$,

$$f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}^+$,

$$F_n(x) := f(nx).$$

2 1. Démontrer que la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$, vers une fonctions F, que l'on déterminera.

3 2. La suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle uniformément convergente sur $[0,1]$? Et sur $[1,+\infty[$? Justifier.

Exercice 3. Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n\colon \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(x) := \frac{x}{n(1+nx^2)}, \qquad x\in\mathbb{R}^+.$$

1 1. Calculer $f_n'(x)$ pour $x\geq 0$.

1 2. Démontrer que $\|f_n\|_\infty = f(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

1 3. Étudier la convergence normale, simple et uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

2 4. Soit $0<a<b$. Démontrer que la série $\sum f_n'$ est normalement convergence sur $[a,b]$. Peut-on conclure que la fonction $x\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est de classe C^1 sur $[a,b]$? Et sur $]0,+\infty[$?

$\boxed{Q}$ $\sum x_n$ c.v. $\Rightarrow \exists S \in \mathbb{R}: \sum_{k=0}^{n} x_k \to S \Rightarrow x_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} x_k}_{\to S} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} x_k}_{\to S} \to 0$

Contrexemple pour la réciproque : $\frac{1}{n} \to 0$ mais $\sum \frac{1}{n}$ diverge

$\boxed{E1}$ $\int_0^2 2t^{-1/2}\,dt = \lim_{a \to 0^+} \left[4t^{1/2}\right]_a^2 = 4\sqrt{2}$

$\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt = \lim_{b \to +\infty} \left(\left[-te^{-t}\right]_0^b + \int_0^b e^{-t}\,dt \right) = \underbrace{\lim_{b \to +\infty} -be^{-b}}_{=0} + \lim_{b \to +\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^b = 1$

$\sum_{n=4}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \underset{n=k+4}{=} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{4^4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3 \cdot 4^3}.$

$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n - u_{n+2}) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} (u_n - u_{n+2}) = u_0 + u_1 - \underbrace{u_{N+1}}_{\to 3} - \underbrace{u_{N+2}}_{\to 3} \to 1+2-2\cdot 3 = -3$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$

$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$

$\boxed{E2}$ $F_n(x) = \frac{nx}{1+nx} \begin{cases} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 & , \text{ si } x > 0 \\ \to 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$ Donc $F_n \to F$ simplement sur $\mathbb{R}^+$, où $F(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

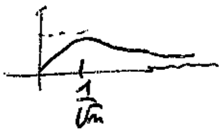
La convergence de (F_n) vers F ne peut pas être uniforme en $[0,1]$, puisque F_n est continue sur $[0,1]$ $\forall n$ et F est discontinue en 0.

Sur $[1,+\infty[$ la c.v. est uniforme, en effet :

$\forall x \geq 1: \quad |F_n(x) - F(x)| = \left| \frac{nx}{1+nx} - 1 \right| = \left| \frac{-1}{1+nx} \right| \underset{x \geq 1}{\leq} \frac{1}{1+n}$

Donc $\sup_{x \in [1,+\infty[} |F_n(x) - F(x)| \leq \frac{1}{1+n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$

$\boxed{E3}$ $f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$, $f_n'(x) = \frac{n + n^2x^2 - 2n^2x^2}{n^2(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$, $x \geq 0$



$f_n'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1/\sqrt{n}]$ $\quad f_n'(x) < 0$ si $x > \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Donc $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n^{3/2}}.$

Mais alors $\sum \|f_n\|_\infty = \sum \frac{1}{2n^{3/2}}$ converge par Riemann et la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$ (et ainsi unif. c.v. et simplement c.v.).

Soit $0 < a < b$: $\forall x \in [a,b]$: $|f_n'(x)| \leq \frac{1+nb^2}{n(1+na^2)^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{nb^2}{n^3a^4} = \frac{b^2}{n^2a^4}$

et $\sum \frac{b^2}{n^2a^4}$ converge par Riemann. Donc $\sum \sup_{x \in [a,b]} |f_n'(x)|$ converge et $\sum f_n'$ c.v. normalement sur $[a,b]$. Mais alors f est C^1 sur $[a,b]$ $\forall\, 0 < a < b$ et donc C^1 sur $]0,+\infty[$.