Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
Novembre 2023

Analyse pour l'économie 1. Partiel 2023

Durée 1h30. Documents non autorisés

Question de cours. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Démontrer que si $\sum x_n$ converge, alors $x_n \to 0$. Montrer, à l'aide d'un exemple, que la réciproque n'est pas vraie en général.

Exercice 1.

1. Calculer la valeur des intégrales impropres suivantes
$$\int_0^2 \frac{2}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t, \qquad \int_0^\infty t\exp(-t)\,\mathrm{d}t.$$
2. Calculer les sommes des séries
$$\sum_{n=4}^{\infty}\Big(\frac{1}{4}\Big)^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(u_n - u_{n+2}),$$
où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, telle que $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_n \to 3$.
3. Construire un exemple d'une fonction continue $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, non identiquement nulle, telle que $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,
$$f(x) = \frac{x}{1+x}.$$
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$,
$$F_n(x) := f(nx).$$

1. Démontrer que la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$, vers une fonctions F, que l'on déterminera.
2. La suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle uniformément convergente sur $[0,1]$? Et sur $[1,+\infty[$? Justifier.

Exercice 3. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f_n(x) := \frac{x}{n(1+nx^2)}, \qquad x \in \mathbb{R}^+.$$

1. Calculer $f_n'(x)$ pour $x \geq 0$.
2. Démontrer que $\|f_n\|_\infty = f(\frac{1}{\sqrt{n}})$.
3. Étudier la convergence normale, simple et uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
4. Soit $0 < a < b$. Démontrer que la série $\sum f_n'$ est normalement convergence sur $[a,b]$. Peut-on conclure que la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est de classe C^1 sur $[a,b]$? Et sur $]0,+\infty[$?