Suites de fonctions
Vrai-Faux sur les convergences en 12 questions

Analyse pour l'économie 1

4 octobre 2026

Dans chacune des questions, la suite de fonctions est appelée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $f_n : I \to \mathbb{R}$.
Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1 Convergence simple

Question 1 : Pour $I = \mathbb{R}$ et $f_n(x) = \dfrac{x+1}{n}$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Question 2 : Pour $I = \mathbb{R}$ et $f_n(x) = \sin(nx)$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement.

Question 3 : Pour $I =]0,1]$ et $f_n(x) = nx^n \ln(x)$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement.

Question 4 : Pour $I = \mathbb{R}$ et $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

2 Convergence uniforme

Question 5 : Si, pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge simplement vers f et $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{|x|}{n}$, alors la convergence $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers f est toujours uniforme.

Question 6 : Pour $I = \mathbb{R}$ et $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Question 7 : Pour $I = \mathbb{R}_+^*$ et $f_n(x) = ne^{-n^2x^2}$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, ainsi que sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

Question 8 : Pour $I = \mathbb{R}_+$ et $f_n(x) = \dfrac{n}{1+n(1+x)}$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

Question 9 : Pour $I = [0,1]$ et $f_n(x) = xe^{\frac{x}{n}}$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers la fonction $f : x \mapsto x$ sur $[0,1]$.

Question 10 : Pour $I = \mathbb{R}$ et $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction $f : x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$.

Question 11 : Pour $I =]0,1]$ et $f_n(x) = nx^n \ln(x)$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers sa limite simple sur I.

Question 12 : Pour $I = [0,1]$ et $f_n(x) = n^\alpha x^n(1-x)$ avec $a \geq 0$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle si et seulement si $\alpha \geq 1$.

Correction très succincte

(*peu rédigée, sans quantificateur, etc.*)

Question 1 : Pour $I=\mathbb{R}$ et $f_n(x)=\dfrac{x+1}{n}$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
VRAI. Soit $x\in\mathbb{R}$. Si $x=-1$, alors $f_n(-1)=0$ et sinon $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$.

Question 2 : Pour $I=\mathbb{R}$ et $f_n(x)=\sin(nx)$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement.
FAUX. A part pour $x\in\mathbb{R}$ tel que $\sin(nx)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sin(nx)$ n'a pas de limite quand $n\to+\infty$.

Question 3 : Pour $I=]0,1]$ et $f_n(x)=nx^n\ln(x)$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement.
VRAI. Soit $x\in[0,1]$. Si $x=1$, alors $f_n(1)=0$, et sinon $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$ car $x^n\to 0$ puisque $x\in]0,1[$ et par croissances comparées. D'où la convergence vers la fonction nulle sur I.

Question 4 : Pour $I=\mathbb{R}$ et $f_n(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^n}$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
FAUX. Soit $x\in\mathbb{R}$. Si $x=0$, alors $f_n(0)=1$ et sinon $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$. Donc la suite de fonctions tend vers la fonction discontinue valant 1 en 0 et nulle sinon.

Question 5 : Si, pour tout $x\in I$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge simplement vers f et $|f_n(x)-f(x)|\leq\frac{|x|}{n}$, alors la convergence $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers f est toujours uniforme.
FAUX. Il faudrait plutôt avoir une majoration de type $|f_n(x)-f(x)|\leq\alpha_n$ avec α_n indépendant de x et tendant vers 0 quand $n\to+\infty$. Si I est borné, alors $|x|\leq M$ et donc $|f_n(x)-f(x)|\leq\frac{M}{n}=\alpha_n$ et on peut en effet conclure que $\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0$, d'où la convergence uniforme vers f sur I.

Question 6 : Pour $I=\mathbb{R}$ et $f_n(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^n}$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
FAUX. La limite simple (question 4) étant une fonction discontinue et f_n étant continue sur I pour tout $n\in\mathbb{N}$, la convergence n'est donc pas uniforme.

Question 7 : Pour $I=\mathbb{R}_+^*$ et $f_n(x)=ne^{-n^2x^2}$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, ainsi que sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$.
FAUX car FAUX sur $\mathbb{R}_+^*$, et VRAI sur $[a,+\infty[$. Soit $x>0$, alors $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=0$ par croissances comparées, d'où la convergence simple vers la fonction nulle. Comme on a, pour tout $x>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$, $|f_n(1/n)-f(1/n)|=|f_n(1/n)|=ne^{-1}\to+\infty$, et que $1/n\in\mathbb{R}_+^*$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la convergence n'est pas uniforme. Par contre, on a, comme $x\mapsto f_n(x)$ est décroissante pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sup_{x\geq a}|f_n(x)-f(x)|=|f_n(a)|\to 0$ donc on a bien convergence uniforme sur $[a,+\infty[$.

Question 8 : Pour $I=\mathbb{R}_+$ et $f_n(x)=\dfrac{n}{1+n(1+x)}$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{1}{1+x}$.
VRAI. La convergence simple vient du fait que, pour tout $x\geq 0$, $1+x\neq 0$ et donc $f_n(x)\sim\frac{n}{n(1+x)}=\frac{1}{1+x}$. Ensuite, on calcule, pour tout $x\geq 0$ et tout $n\in\mathbb{N}$, $|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{n}{1+n(1+x)}-\frac{1}{1+x}\right|=\frac{1}{1+x+n(1+x)^2}$. Comme de plus $1+x+n(1+x)^2\geq 1+0+n(1)=n+1\geq n$, on a $|f_n(x)-f(x)|\leq\frac{1}{n}$. Or $1/n$ est indépendant de x et tend vers 0 quand $n\to+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+}|f_n(x)-f(x)|=0$ et donc il y a bien convergence uniforme sur I.

Question 9 : Pour $I=[0,1]$ et $f_n(x)=xe^{\frac{x}{n}}$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers la fonction $f:x\mapsto x$ sur $[0,1]$.
FAUX. Tout d'abord, il y a bien convergence simple vers f. En effet, soit $x\in[0,1]$. Si $x=0$, alors

$f_n(0) = 0 = f(0)$ et sinon $f_n(x) \to x = f(x)$ car $x/n \to 0$. De plus, pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|f_n(x) - f(x)| = x\left(e^{\frac{x}{n}} - 1\right)$ et comme $x \mapsto x\left(e^{\frac{x}{n}} - 1\right)$ est croissante sur I comme produit de fonctions positives et croissantes, alors $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = e^{\frac{1}{n}} - 1 \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc il y a bien convergence uniforme vers f sur $[0,1]$.

Question 10 : Pour $I = \mathbb{R}$ et $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction $f : x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$.
VRAI. Il est tout d'abord clair que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + \frac{1}{n} \to x^2$ et donc $f_n(x) \to \sqrt{x^2} = |x|$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, en multipliant par l'expression conjuguée, on obtient : $|f_n(x) - f(x)| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} = \frac{1}{n\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}\right)} \leq \frac{1}{n \times \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Comme $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est indépendant de x et tend vers 0 quand $n \to +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$, d'où la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Question 11 : Pour $I =]0,1]$ et $f_n(x) = nx^n \ln(x)$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers sa limite simple sur I.
VRAI. Sa limite simple est la fonction nulle sur I (question 3), et on a $|f_n(x) - f(x)| = -nx^n \ln(x)$ dont la dérivée est $x \mapsto -n\left(nx^{n-1}\ln(x) + \frac{x^n}{x}\right) = -nx^{n-1}(n\ln(x) + 1)$. Comme $n\ln(x) + 1 \geq 0 \iff x \geq e^{-\frac{1}{n}}$, alors $|f_n(x) - f(x)|$ est croissante sur $]0, e^{-\frac{1}{n}}[$ et décroissante sur $]e^{-\frac{1}{n}}, 1]$. Le maximum est donc atteint en $e^{-\frac{1}{n}}$ et on a donc $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \left|f_n(e^{-\frac{1}{n}}) - f(e^{-\frac{1}{n}})\right| = e^{-1}$ qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$, donc il n'y a pas de convergence uniforme.

Question 12 : Pour $I = [0,1]$ et $f_n(x) = n^\alpha x^n(1-x)$ avec $a \geq 0$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle si et seulement si $\alpha \geq 1$.
FAUX. Comme $f_n(1) = f_n(0) = 0$ et, pour tout $x \in]0,1[$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, la suite de fonctions converge simplement vers la fonction nulle. Ensuite, on a $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$. Comme $f_n'(x) = n^\alpha x^{n-1}(n(1-x) - x)$, le maximum de f_n sur $[0,1]$ est atteint en $x = \frac{n}{n+1}$ et on a $f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^\alpha}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. On a $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \to e^{-1}$ (écriture exponentielle et développement limité), et donc $|f_n(x) - f(x)| \sim e^{-1} n^{\alpha-1}$ qui tend vers 0 si et seulement si $a < 1$. D'où la convergence uniforme uniquement si $a < 1$.