Séries de fonctions.

Exercice 81

Pour chacune des séries de fonctions suivantes, déterminer s'il y a ou non convergence simple, convergence uniforme, convergence normale (dans l'ordre qui vous semblera le plus approprié, à chaque cas).

$$1)\ \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2} \text{ sur } [-1,1], \text{ puis sur } [-2,2] \qquad 2)\ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 x} \text{ sur } [1,2], \text{ puis sur }]0,+\infty[$$

$$3)\ \sum_{n\geq 0} e^{-nx^2} \text{ sur } [1,+\infty[, \text{ puis sur } [0,+\infty[, \text{ et enfin sur }]0,+\infty[$$

$$4)\ \sum_{n\geq 0} 2^{-\frac{n}{x}} \text{ sur }]0,a]\ (a>0), \text{ puis sur }]0,+\infty[$$

$$5)\ \sum_{n\geq 0} n^2 x^n \text{ sur } [0,a]\ (0\leq a<1), \text{ puis sur } [0,1] \text{ et enfin sur } [0,1[$$

$$6)\ \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1} \text{ sur } [a,+\infty[\ (0<a), \text{ puis sur } [0,+\infty[$$

$$7)\ \sum_{n\geq 1} \frac{n+x^2}{n^4+x^2} \text{ sur } [0,+\infty[, \text{ puis sur } [0,1] \qquad 8)\ \sum_{n\geq 1} \frac{n+x}{n^4+x^2} \text{ sur } [0,+\infty[$$

Exercice 82

Pour $x \in [0,+\infty[$, et $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = \dfrac{x^2}{n^3+2x^3}$.

1) La série de fonctions $\sum u_n$ est-elle simplement convergente ?

2) La série de fonctions $\sum u_n$ est-elle normalement convergente ?

3) a) Soit $n \geq 1$. Montrer que pour tout entier k avec $n \leq k \leq 2n$, $u_k(n) \geq \dfrac{1}{17n}$.

En déduire que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k(n) \geq \frac{1}{17}$ puis que $\displaystyle\left\| \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \right\|_\infty \geq \frac{1}{17}$.

b) La série de fonctions $\sum u_n$ est-elle uniformément convergente ?

Exercice 83

Pour les x réels où cette série converge, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}.$$

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Discuter de la continuité éventuelle de f sur son domaine de définition.
3) Montrer que la fonction f est strictement décroissante.
4) Étudier la limite éventuelle de f en $+\infty$.

Exercice 84

Pour les x réels positifs où cette série converge, on pose

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right).$$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ puis calculer sa valeur.

Exercice 85 Pour x réel et $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$.
1) Montrer que la série de fonctions σu_n converge sur $\mathbb{R}$, en précisant son mode de convergence. Dans la suite de l'exercice, on notera f sa somme.
2) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\,dt = 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)^4}$.
4) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x réel $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$.
Exercice 86 Pour les x réels strictement positifs où cette série converge, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

Montrer que cette fonction est définie sur $]0, +\infty[$, puis montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Exercice 87 Pour $x \in]1, +\infty[$, et $n \geq 0$, on pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n + x^n}$.
1) La série de fonctions $\sum u_n$ est-elle simplement convergente ?
2) La série de fonctions $\sum u_n$ est-elle normalement convergente ?
3) a) Soit n et m deux entiers naturels avec $n \leq m$. Justifier que pour tout $x > 1$ on a :

$$\sum_{k=n}^{m} u_k(x) \leq \left\| \sum_{k=n}^{m} u_k \right\|_\infty .$$

b)Soit n et m deux entiers naturels avec $n \leq m$. Montrer que l' on a :

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k+1} \leq \left\| \sum_{k=n}^{m} u_k \right\|_\infty \leq \left\| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \right\|_\infty .$$

c) La série de fonctions $\sum u_n$ est-elle uniformément convergente ?