Suites de fonctions.

Exercice 71
Calculer la limite simple de chacune des suites de fonctions suivantes, et décider si la convergence est uniforme ou non.

1) $f_n\colon]0,1] \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = \dfrac{1}{nx}$ 2) $f_n\colon [1,2] \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = \dfrac{1}{nx}$

3) $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2x^2+1}$ 4) $f_n\colon [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2x^2+1}$

5) $f_n\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = \exp(-nx)$ 6) $f_n\colon [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = \exp(-nx)$

7) $f_n\colon [1,2] \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = \exp(-nx)$

Exercice 72
On étudie les suites de fonctions réelles définies respectivement pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$f_n\colon x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{x}{x+n} + \arctan(x) \qquad \text{et} \qquad g_n\colon x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{nx}{1+nx}$$

1) Ces suites de fonctions convergent-elles simplement sur $\mathbb{R}^+$?
2) Convergent-elles uniformément sur $[0,1]$? Sur $]0,1]$? Sur $[1,+\infty[$?
3) Soit a un réel avec $0 < a < 1$. Convergent-elles uniformément sur $[a,1]$?

Exercice 73
On considère la suite de fonctions de $[-1,1]$ vers $\mathbb{R}$ définies pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$f_n(x) = \sin(nx^2)\exp(-nx^2).$$

1) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[-1,1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.
3) Montrer que pour tout $a \in]0,1[$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,1]$.

Exercice 74 On considère la suite de fonctions de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ définies pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{1+x^n}.$$

Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$, puis sur $[0,1[$, puis sur $[0,a]$ pour un $a \in]0,1[$ fixé.

Exercice 75
On considère la suite de fonctions de $[0,1[$ vers $\mathbb{R}$ définies pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$f_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right).$$

1) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer (si elle existe) la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers 1^-.
3) Que peut-on en déduire pour la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 76
On considère la suite de fonctions de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ définies pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n n x^2}.$$

1) Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions sur $[0,1]$.
2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$ puis la limite de I_n en l'infini. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.
3) Donner une démonstration plus élémentaire de cette non-convergence uniforme, sans utiliser un calcul d'intégrales.

Exercice 77
On considère la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x^2}.$$

1) Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2) Soit a et b deux réels avec $a < b$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est uniformément convergente sur le segment $[a, b]$.
3) Soit a un réel. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas uniformément convergente sur $[a, +\infty[$.
4) Calculer la limite en l'infini de $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$.

Exercice 78
On considère la suite de fonctions de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ définies pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} -n^3x^2 + 2n^2x & \text{si } x \in [0, \frac{2}{n}]\,; \\ 0 & \text{si } x \in]\frac{2}{n}, 1]. \end{cases}$$

1) Étudier sa convergence simple.
2) Déterminer la limite (éventuelle) à l'infini de la suite des $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.
3) En déduire que la suite $(f_n)_{n\geq 2}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0, 1]$.

Exercice 79
On considère la suite de fonctions de $[-1, 1]$ vers $\mathbb{R}$ définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$g_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}.$$

1) Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction nulle.
2) Étudier la convergence de $(g_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[-1, 1]$.
3) On considère la suite de fonctions de $[-1, 1]$ vers $\mathbb{R}$ définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln(1 + n^2x^2)}{2n^2}.$$

Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[-1, 1]$.

Exercice 80
On considère la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$f_n(x) = \sqrt{n}\arctan\left(\frac{x}{n}\right).$$

1) Étudier les modes de convergence de la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$.
b) En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$.
3) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.