3 Topologie dans $\mathbb{R}^n$

Distances et normes

Exercice 1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour que la fonction $(x, y) \mapsto |f(x) - f(y)|$ définisse une distance sur $\mathbb{R}$.

Considérer après les cas $f(x) = ax + b$ (où $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$) et ensuite $f(x) = e^x$: les deux distances obtenues sont-elles (métriquement) équivalentes à la distance usuelle sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on considère les normes

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

Dessiner pour chacune d'elles, les boules $B(0, 1)$ dans le cas de la dimension $n = 2$. Démontrer que dans $\mathbb{R}^n$, les trois normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

Exercice 3. Démontrer que, dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, la norme vérifie l'inégalité

$$\forall\, x, y \in E, \qquad \Big|\, \|x\| - \|y\| \,\Big| \le \|x - y\|.$$

Exercice 4. L'application $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$, définie par $\|x\| = \sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|}$, définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$? L'application $d\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$, définie par $d(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|} + \sqrt{|x_2 - y_2|}$, définit-elle une distance sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5. Le diamètre d'une partie A d'un espace métrique est défini par $\mathrm{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y)$.

Que peut-on dire du diamètre d'une boule $B(x, r)$? Et dans le cas d'un espace vectoriel normé ?

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel normé. Si C est une partie non vide de E, on dit que C est *convexe* si pour tout $x, y \in C$ et tout $t \in [0, 1]$, on a $(1 - t)x + ty \in C$. Montrer que les boules de E sont convexes.

Topologie des espaces métriques

Exercice 7. Démontrer que, dans un espace métrique (X, d), si $x \neq y$, alors on peut trouver $r > 0$ tel que les boules $B(x, r)$ et $B(y, r)$ sont disjointes.

Démontrer ensuite que dans un espace métrique les singletons $\{x_0\}$ sont des parties fermées.

Exercice 8. Montrer que dans un espace métrique la réunion infinie de fermés n'est pas toujours un fermé. Montrer que l'intersection infinie d'ouverts n'est pas toujours un ouvert.
(*Indication* : on pourra considérer des suites d'intervalles de $\mathbb{R}$ bien choisies).

Exercice 9. Démontrer que, dans un espace métrique (X, d), les "boules fermées" $\overline{B}(x, r) = \{y \in X\colon d(x, y) \le r\}$, où $x \in X$ et $r > 0$, sont des parties fermées de X.

Exercice 10. Calculer l'intérieur et l'adhérence des parties suivantes de $\mathbb{R}$: $[0, 1[$, $]1, +\infty[$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

Exercice 11. Soient E un espace vectoriel normé et A,B deux parties non vides de E, on pose $A + B = \{a + b;\ a \in A,\ b \in B\}$. Montrer que si B est un ouvert alors $A + B$ est un ouvert.

Exercice 12. exercice supprimé

Exercice 13. Soient (X, d) un espace métrique, A une partie non vide de X et $x \in X$. On pose $d(x, A) = \inf\{d(x, y);\ y \in A\}$. Caractériser l'ensemble des points x tels que $d(x, A) = 0$.

Continuité

Exercice 14. Soit $k \in \mathbb{R}$;, f une fonction de deux variables, définie sur un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. On rappelle que l'ensemble $\{(x, y) \in \mathcal{D}$ t.q. $f(x, y) = k\}$ est la *ligne de niveau* k de la fonction f dans $\mathcal{D}$.

Trouver l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ et ensuite les lignes de niveaux 0, 1, -1, 2 et 3 de la fonction $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et les représenter graphiquement. Même question avec $f(x, y) = x^2 + y^2$ et $f(x, y) = y/x$.

Exercice 15. Pour chacune des fonctions suivantes tracer les lignes de niveau indiquées :

$$f(x,y) = \frac{x^2+y}{x+y^2}, \qquad k=0,-1; \qquad f(x,y) = \frac{xy-x+y}{xy}, \qquad k=1,2.$$
$$f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{8-x^2y^2}, \qquad k=2; \qquad f(x,y) = x-y-|x-y|, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Pour la dernière question, traiter séparément les cas $k=0$, $k>0$ et $k<0$.

Exercice 16. En utilisant les propriétés des fonctions continues, vérifier si les ensembles suivants sont ouverts, s'ils sont fermés, et déterminer leur intérieur et leur adhérence.

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z>2\}, \qquad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2<1 \text{ et } (x-\tfrac{1}{2})^2+y^2 \geq \tfrac{1}{16}\},$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=x^2\}, \qquad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0<|x|<|y|<1\},$$

Exercice 17. Déterminer si les ensembles suivants sont compacts:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0<|x|<|y|<1\}$$
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2+y^2+z^2-4)(x^2+y^2+z^2-1) \leq 0\}$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ et } xy \leq 1\}$$

Exercice 18. Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ou $A \subset \mathbb{R}^n$, une application continue.
a) Démontrer toute norme $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ est une application lipschitzienne.
b) Montrer que l'application $x \mapsto \|f(x)\|$ est continue de A dans $\mathbb{R}$.
c) En déduire que si A est un compact, alors f est bornée.

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Montrer que f est continue.

Exercice 20. Sur quelles parties de $\mathbb{R}^2$ les formules suivantes définissent-elles une fonction continue ?

$$f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \qquad g(x,y) = \sin\left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right).$$

Démontrer que ces deux fonctions se prolongent par continuité au point $(0,0)$

Exercice 21. Determiner l'ensemble de définition des fonctions f suivantes. Peut-on prolonger f par continuité au delà de son ensemble de définition ?

a) $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{y^2}$

b) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x}$

c) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

d) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$

e) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^3+3y^2}$

f) $f(x,y) = (x+y^2)\sin\frac{1}{xy}$

Exercice 22. Une fonction continue $f\colon (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}$ est dite homogène de dégré $d \in \mathbb{R}$ si $\forall\, x \neq 0$ et $\forall\, \lambda > 0$ on a $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$.

1. Donner quelques exemples de fonctions homogènes.
2. Pour quelles valeurs de d une fonction homogène de degré d est-elle bornée ?
3. Pour quelles valeurs de d est-elle prolongeable avec continuité à l'origine ?

Exercice 23. établir si les fonctions suivantes sont bornées dans $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = (x+2y^2)\exp(-|xy|), \quad f(x,y) = \exp(\cos(1+xy)), \quad f(x,y) = (x^4+y^2)\exp(-x^2-y^4).$$

4 Dérivées partielles et différentiabilité de fonctions de plusieurs variables

Exercice 24. La fonction f de deux variables est définie par la règle

$$f(x,y) = \sin(2x-y)\ln(xy-1) + xy^3 - 1.$$

1. Prouver que f est de classe C^1 dans un voisinage du point $(1,2) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $f(1,2)$, $\nabla f(x,y)$, et $\nabla f(1,2)$.
2. Quelle est la valeur de $f(1+h, 2+k)$ (approximativement) pour un petit déplacement (h,k) à partir du point $(1,2)$?
3. À partir du point $(1,2)$, on voudrait, par un petit déplacement parallèle à l'un des axes, augmenter la valeur de f ; quel est le meilleur choix de direction pour celui-ci ?
4. On pose une goutte d'eau sur la surface donnée par le graphe de f, au point $(1,2,f(1,2))$. Dans quelle direction la goutte commence-t-elle à glisser ?

Exercice 25. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x,y) = [x^2+2y^3]^{1/5}$. Calculer $f(4,2)$ et la différentielle $\mathrm{d}f$ au point $(4,2)$.

Utiliser le résultat de la question précedente afin de calculer approximativement $[(3,8)^2 + 2(2,1)^3]^{1/5}$.

Exercice 26. On considère la surface (l'ellipsoïde) d'équation $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$.

1. Montrer que le point $(\frac{1}{3}, 2, 2)$ appartient à la surface et trouver l'equation du plan tangent à la surface en $(\frac{1}{3}, 2, 2)$.
2. Trouver les points auxquels le plan tangent est horizontal (c'est-à-dire, parallèle au plan $z = 0$).
3. Trouver les points auxquels le plan tangent est vertical.

Exercice 27. On considère les fonctions $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ pour } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x,y) = \sin(|xy|)\ .$$

1. Tracer les courbes de niveau $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$.
2. Discuter la continuité de ces fonctions en $(0,0)$ et calculer les dérivées partielles premières.
3. Vérifier si ces fonctions sont de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 28. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Ecrire sa matrice jacobienne.

Exercice 29. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f au point $(0,0)$.
2. Montrer que f admet en $(0,0)$ des dérivées dans toutes les directions.

3. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 30 (Gradient, composition)**.** On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto e^{3x+2y} \in \mathbb{R}$ et on pose $x = x(t) = \cos(t)$ et $y = y(t) = t^2$. Calculer de deux manières différentes la dérivée de la fonction

$$F : \mathbb{R} \ni t \mapsto F(t) = g\big(x(t), y(t)\big),$$

une première fois directement, et une seconde fois comme une dérivée de fonction composée.

Exercice 31. On suppose que $u = F(x,y,z)$ et $z = f(x,y)$, où les fonctions sont de classe C^2. Trouver une formule qui exprime u_x en fonction des dérivés partielles de F et f. De même pour u_{xx}.

Exercice 32. Un cône droit circulaire augmente à cause d'un écoulement de sable. À un certain instant, sa hauteur est de 30 cm et accroit à 2 cm/sec. Au même moment le rayon de sa base est de 20 cm et augmente au taux de 1 cm/sec. A quel taux instantané (en cm^3/sec) le volume augmente-t-il à cet instant ? [Rappel : $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$]

Exercice 33.

1. Pour $g(x,y,z) = xy^4z^3$, vérifier que $g_{xyz} = g_{xzy} = g_{zyx}$.
2. Montrer que les fonctions $f(x,y) = 5xy$, $f(x,y) = e^x \sin y$, $f(x,y) = \arctan(y/x)$ et $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ sont toutes solution de l'équation aux dérivés partielles (edp) de Laplace $f_{xx} + f_{yy} = 0$.
3. Soit $f = x_1^3 x_2^5 x_3^7 x_4^{13}$. Trouver $\dfrac{\partial^6 f}{\partial x_1 \partial x_3 \partial x_1^2 \partial x_4 \partial x_2}$.
4. On prend $f(x,y,z) = x^2\cos(y^3+z^2)$. Pourquoi sait-on que $f_{zyxxyxyy} = 0$, sans rien calculer ? Sait-on aussi que $f_{xyyzzzy} = 0$? (Expliquer).

Exercice 34. Une fonction $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite *radiale* si elle elle de la forme $F(x) = g(\|x\|)$, où $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

1. Que peut-on dire des surfaces de niveau des fonctions radiales ?
2. On suppose que la fonction g est deux fois dérivable dans $[0,\infty)$. Calculer $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$ pour $x \neq 0$.
3. On note ΔF le *Laplacien* de F, défini par $\Delta F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x)$. Calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire que le Laplacien d'une application radiale est une fonction radiale ΔF est une fonction radiale.

Exercice 35. Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définies par

$$f(x,y) = \Big(\frac{x}{(xy)^2+1}, \, y\left((xy)^2+1\right)\Big), \qquad g(x,y) = \Big(x\left((xy)^2+1\right), \, \frac{y}{(xy)^2+1}\Big).$$

1. Calculer les dérivées partielles de f et g là où elles existent.
2. Calculer $g \circ f$.
3. Vérifier que $f(1,1) = (1/2, 2)$ et trouver le produit des matrices jacobiennes $J_f(1/2,2)$ et $J_f(1,1)$.

Exercice 36. Déterminer si les champs de vecteurs suivants $\vec{V}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sont des champs de gradients, et si oui, déterminer leurs potentiels scalaires. Autrement dit : *établir s'il existe* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *telle que* $\nabla f = \vec{V}$ *dans* $\mathbb{R}^2$*, et si oui, construire une telle* f.
(*Indication :* trouver une condition nécessaire pour qu'une telle application f existe, en appliquant le théorème de Schwarz).

1. $\vec{V}(x,y) = (y,x)$,
2. $\vec{V}(x,y) = (3x^2y + 2x + y^3, x^3 + 3xy^2 - 2y)$,
3. $\vec{V}(x,y) = (\exp(xy), \sin(x+y))$,

Même question pour le champ de vecteur de $\mathbb{R}^3$, $\vec{V}(x,y,z) = (x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy)$.

Formule de Taylor et recherche d'extrema

Exercice 37. Trouver le développement limité d'ordre deux et autour de 0 de la fonction $x \mapsto e^x$. De même pour la fonction $u \mapsto \sin u$. Ensuite utiliser ces deux réponses afin de trouver le développement limité d'ordre deux à l'origine de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^x \sin(x+y)$. Comparer la réponse à celle obtenue par l'écriture directe de la formule de Taylor d'ordre 2 pour f.

Exercice 38. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction s'annulant en $(0,0,0)$ et dont on connait le développement limité d'ordre 2 centré en ce point. Quel est le développement limité centré à l'origine de la fonction $(x,y,z) \mapsto e^{xy} f(x,y,z)$?

Exercice 39. Soit $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ et $g(x,y) = x^2 + 2y^2 + 3xy$. Montrer que l'origine est un point critique(=stationnaire) pour f et g. Étudier le signe de $f - f(0,0)$ et $g - g(0,0)$ et en déduire la nature.

Exercice 40. Soit $f(x,y) = rx^2 + 2s\,xy + t\,y^2$, $s,t \in \mathbb{R}$. Montrer que si $rt - s^2 > 0$ alors l'origine est un extremum global strict. Préciser s'il s'agit d'un point de minimum ou de maximum (distinguer les cas $r > 0$ et $r < 0$). Que peut-on dire de l'origine si $rt - s^2 < 0$?

Exercice 41.

1. Déterminer les points critiques de la fonction $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$. Pour chaque point critique, écrire la formule de Taylor d'ordre 2 pour f, centrée à ce point. Etudier les extrema relatifs (ou locaux) de $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$. Établir si f admet des extrema absolus (ou globaux).

2. Mêmes questions pour

$$\begin{array}{ll} (a) & f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3 \\ (b) & f(x,y) = (3x+4y)e^{-(x^2+y^2)} \\ (c) & f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^3 \\ (d) & f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy \end{array}$$

Exercice 42. On considère la fonction

$$f(x,y) = 1 + (x + \sqrt{2}y)^2 + ax^4 \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

Déterminer les valeurs du paramètre a telles que l'origine soit (i) un point de col (ii) un point de minimum local (iii) un point de minimum local strict.

Exercice 43. On considère la fonction

$$f(x,y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

1. Etudier les extrema relatifs (locaux) de f sur $\mathbb{R}^2$. *Suggestion:* on pourra utiliser les symétries de la fonction $f(x,y)$ pour réduire le nombre de cas à étudier.

2. Démontrer que $f(x,y) \to 0$ quand $(x,y) \to \infty$.

3. Déduire de ce qui précède l'existence des extrema globaux de f sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer les extrema globaux.

Exercice 44. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$.

1. Déterminer les extrema locaux de f.

2. f possède-t-elle des extrema absolus sur $\mathbb{R}^2$?

3. Représenter $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}$
   Justifier l'existence d'un maximum absolu et d'un minimum absolu pour f dans T. Les déterminer.

Exercice 45. On considère l'application $F(x,y) = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{1 - x^2 - y}$.

1. Trouver l'ensemble $\mathcal{D}$ de tous les points (x,y) de $\mathbb{R}^2$ où $F(x,y)$ est bien définie. Représenter graphiquement cet ensemble.

2. On note par $\partial\mathcal{D}$ la frontière $\mathcal{D}$. Étudier la restriction de f à $\partial\mathcal{D}$. Calculer

$$\min_{(x,y)\in\partial\mathcal{D}} F(x,y) \qquad \text{et} \qquad \max_{(x,y)\in\partial\mathcal{D}} F(x,y).$$

3. Trouver les points critiques de F à l'intérieur de $\mathcal{D}$.

4. Donner la nature de ces points (il n'est pas indispensable de calculer les dérivées secondes de F). En déduire la valeur de

$$\min_{(x,y)\in\mathcal{D}} F(x,y) \qquad \text{et} \qquad \max_{(x,y)\in\mathcal{D}} F(x,y).$$

Exercice 46. Soient $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant les développements limités centrés à l'origine $f(x,y) = 1 + 2x^2 + 3y^4 + o(\|(x,y)\|^4)$ et $g(x,y,z) = 1 + 2x^2 + 3y^4 + o(\|(x,y,z)\|^4)$. L'origine est-il un point stationnaire pour f ? Et pour g ? Peut-on en préciser la nature ?

Exercice 47. Mettre sous "forme canonique" les formes quadratiques de trois variables suivantes, c'est à dire, écrire $Q(x,y,z)$ comme la somme de trois termes de la forme $(ax+by+cz)^2$. Établir ensuite si elles sont sont de signe défini (c'est à dire si $Q \geq 0$ ou $Q \leq 0$ dans $\mathbb{R}^2$).

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &= x^2 + y^2 + xy + 2z^2 \\ Q(x,y,z) &= x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 5yz + 6xz \end{aligned}$$

Exercice 48. Écrire les formules de Taylor d'ordre 2 pour $f(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2+\frac{4}{3}z^3+xy-2x-y+1$, centrées aux points critiques de f. Déterminer ensuite la nature de ces points.

Exercice 49. Étudier la nature des points critiques des fonctions définies par

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \frac{1}{2}x^2 + xyz + y - z \\ f(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + 2x - 2y - 4z + 5 \\ f(x,y,z) &= 2x^2y - y^2 - x^4 - z^2. \end{aligned}$$

Préciser si les extrema trouvés sont stricts.