Intégrales impropres.

Exercice 50
Pour chacune des intégrales suivantes, déterminer si elle est convergente ou divergente en utilisant la définition. Lorsqu'elle est convergente, préciser sa valeur.

$$1)\int_0^{+\infty} e^{-4t}dt \qquad 2)\int_2^{+\infty} \ln t\, dt \qquad 3)\int_0^{2} \ln t\, dt \qquad 4)\int_0^{+\infty} t^3e^{-t}dt$$

Exercice 51
Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ? On ne cherchera pas à les calculer.

$$1)\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt \qquad 2)\int_0^{+\infty} \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}}dt \qquad 3)\int_0^{\pi} \ln(\sin t)dt$$
$$4)\int_2^{+\infty} (1-\cos(1/t))dt \qquad 5)\int_0^{1} \sin(1/t)dt \qquad 6)\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln(\cos(1/t))dt$$

Exercice 52
Discuter en fonction du paramètre réel a la convergence des intégrales suivantes (sans chercher à les calculer) :

$$1)\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^a}\,dt, \qquad 2)\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^a}\,dt$$

Exercice 53
Soit a et b deux paramètres réels. Discuter selon leurs valeurs de la convergence de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^a(\ln t)^b}dt$.
On pourra :
1) Lorque $a \neq 1$, trouver la réponse en comparant la fonction de l'énoncé à une $\frac{1}{t^c}$, pour c judicieusement choisi.
2) Lorque $a = 1$, calculer explicitement $\displaystyle\int_2^{A} \frac{1}{t(\ln t)^b}dt$ pour A réel destiné à tendre vers $+\infty$.

Exercice 54
1) Soit $\alpha > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}dt$ converge, puis en déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}}dt$ converge (intégrer par parties).
2) Soit $\beta > 1$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(s^\beta)\, ds$ converge (effectuer un changement de variable).

Exercice 55
(Cet exercice poursuit et complète l'exercice précédent).
1) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}dt$ diverge (linéariser $\sin^2 t$).
En déduire que la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ n'est pas absolue.
2) Vérifier que quand $t \to +\infty$,

$$\frac{\sin t}{\sqrt{t}} \sim \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + \frac{\sin^2 t}{t}$$

mais que pourtant $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\frac{\sin t}{\sqrt{t}} + \frac{\sin^2 t}{t})dt$ ne sont pas de même nature.

Exercice 56

1) Démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}dx$.

2) Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, $\dfrac{x-1}{x} \leq \ln(x) \leq x-1$.

3) Pour $X \in]0,1[$, démontrer l'égalité :

$$\int_0^X \frac{xdx}{\ln(x)} = \int_0^{X^2} \frac{dx}{\ln(x)}$$

4) En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^X \frac{x-1}{\ln(x)}dx$, et montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}dx = \ln(2)$.

Exercice 57 Soit c un réel avec $c > 0$.
Pour x et y réels strictement positifs, on note

$$I_{x,y} = \int_x^y \frac{\ln t}{t^2+c^2}\, dt.$$

1) Sans la calculer, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+c^2}\, dt$ converge.

2) Montrer que pour tous réels strictement positifs ϵ et X, on a la relation :

$$I_{\epsilon,X} = I_{\frac{c^2}{\epsilon},\frac{c^2}{X}} + \frac{2\ln c}{c}\left[\arctan\left(\frac{c}{\epsilon}\right) - \arctan\left(\frac{c}{X}\right)\right].$$

(On effectuera le changement de variable $s = \dfrac{c^2}{t}$).

3) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+c^2}\, dt$.

Exercice 58 Soit f une fonction continue de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$. On suppose que $f(t)$ admet une limite réelle a quand $t \to +\infty$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t+1) - f(t)]dt$ converge, et préciser sa valeur.