Séries numériques.

Exercice 59
Pour chacune des séries suivantes, déterminer si elle est convergente ou divergente en utilisant la définition. Lorsqu'elle est convergente, préciser sa valeur.

$$1)\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \qquad 2)\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{3^{n-2}} \qquad 3)\sum_{n\geq 0}\frac{9}{(3n+1)(3n+4)} \qquad 4)\sum_{n\geq 2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 60
Pour chacune des séries suivantes, déterminer si elle est convergente ou divergente en essayant d'utiliser la règle de d'Alembert... et en s'adaptant quand ça ne marche pas.

$$1)\sum\frac{n}{2^n} \qquad 2)\sum\frac{1}{n!} \qquad 3)\sum\frac{(-1)^n}{n!} \qquad 4)\sum\frac{e^{in}}{5^n\ln n} \qquad 5)\sum\frac{3^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n-1)!} \qquad 6)\sum\frac{4^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n-1)!}$$

Exercice 61
Pour chacune des séries suivantes, déterminer si elle est convergente ou divergente en essayant d'utiliser la règle de Cauchy... et en s'adaptant quand ça ne marche pas.

$$1)\sum\left[\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \qquad 2)\sum\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \qquad 3)\sum\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

Exercice 62
Pour chacune des séries suivantes, déterminer si elle est convergente ou divergente en utilisant un équivalent simple de son terme général.

$$1)\sum\frac{2+e^{-n}}{\sqrt{n}} \qquad 2)\sum\frac{n^2+1}{n^3+6} \qquad 3)\sum(-1)^n\frac{2^n+3^n}{n^2+\ln n+5^n} \qquad 4)\sum\ln(1+e^{-n}) \qquad 5)\sum\left(ne^{\frac{1}{n}}-n\right)$$

Exercice 63
Pour chacune des séries suivantes, déterminer si elle est convergente ou divergente en la comparant à une série plus simple.

$$1)\sum\frac{1}{n3^n} \qquad 2)\sum\frac{\ln n}{n^{12/11}} \qquad 3)\sum\frac{1}{n\cos^2 n}$$

Exercice 64
Pour chacune des séries suivantes, déterminer si elle est convergente ou divergente en essayant d'utiliser le critère des séries alternées... et en s'adaptant quand ça ne marche pas.

$$1)\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad 2)\sum(-1)^n\left(ne^{\frac{1}{n}}-n\right) \qquad 3)\sum(-1)^n[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]$$

Exercice 65
Pour chacune des séries suivantes, déterminer si elle est convergente ou divergente.

$$1) \sum \frac{1}{\ln(n^2+2)} \qquad 2) \sum (-1)^n \frac{n^3}{n!} \qquad 3) \sum (1+(-1)^n) \qquad 4) \sum \left[\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right]$$

$$5) \sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}} \qquad 6) \sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \qquad 7) \sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$$

Exercice 66
1) Discuter en fonction de la valeur du paramètre complexe a la convergence de la série $\sum na^n$.
2) Discuter en fonction de la valeur du paramètre réel c la convergence de la série $\sum \left[n\sin\left(\frac{1}{n}\right) - c\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]$.

Exercice 67
Pour tout $n \geq 1$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Établir un encadrement judicieux de H_n entre deux intégrales, puis obtenir à partir de cet encadrement un équivalent simple de H_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 68
Pour tout $n \geq 1$, on note $R_n = \displaystyle\sum_{k \geq n} \frac{1}{k^5}$.
Établir un encadrement judicieux de R_n entre deux intégrales, puis obtenir à partir de cet encadrement un équivalent simple de R_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 69
Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \dfrac{e^n\, n!}{n^{n+\frac{1}{2}}}$, puis $z_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
1) Montrer que la série $\sum z_n$ est convergente.
2) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 70
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$, et $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt$.
1) Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+1}.$$

3) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^N I_{N+1}.$$

4) Montrer que I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
5) Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.