# TD Analyse pour l'économie 1

exo 39

(si la lim existe :) $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

$\sum a_n z^n$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

---

a) $\sum \frac{z^n}{n!}$, $a_n = \frac{1}{n!}$ ; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Donc, rayon de cv. $R = \infty$

càd cv. pour tout $z \in \mathbb{R}$

b) $\sum (-1)^n (n+3)!\, z^n$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)!}{(n+3)!} = \lim_{n\to\infty} (n+4) = \infty$$

Donc, rayon de cv. $R = 0$

càd cv. seulement pour $z = 0$.

c) $\sum n^n z^n$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$, Donc, rayon de cv. $R = 0$

d) $\sum \frac{2^n}{n!} z^n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

Par d'Alembert, on trouve le rayon de cv. $R=\infty$.

[Si $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$, alors $R = \frac{1}{2}$]

e) $\sum n z^n$

Cauchy: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$ ✓

d'Alembert: $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$ ✓

f) $\sum (\ln n) z^n$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1$

thme des gendarmes

$1 \leq \ln n \leq n$, si $n$ grand

$\Rightarrow \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{\ln n} \leq \sqrt[n]{n}$

$\sqrt[n]{1} \to 1$, $\sqrt[n]{n} \to 1$

$\Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$ rayon de cv. ✓

g) $\sum \frac{\ln n}{\ln(n+1)} z^n$, (Par la même méthode, $\lim \sqrt[n]{\ln(n+1)} = 1$)

$$\lim \sqrt[n]{\frac{\ln n}{\ln(n+1)}} = \frac{1}{1} \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$$ ✓

(40) "séries lacunaires"

a) $\sum_{n\geq 1} z^{n!} = z^1 + z^2 + z^6 + z^{24} + z^{120} + \cdots$

On pose $z=1$ : $1+1+1+1+\cdots = \infty$ diverge
donc $R \leq 1$

Comparaison : $\sum |z|^{n!} = |z|^1 + |z|^2 + |z|^6 + |z|^{24} + \cdots$
$\leq |z|^0 + |z|^1 + |z|^2 + |z|^3 + |z|^4 + \cdots$
cv. si $|z| < 1$ (série géom)

donc $R \geq 1$ $\Rightarrow R = 1$

---

b) $\sum n^2 z^{(n^2)} = z^1 + 4z^4 + 9z^9 + 16z^{16} + \cdots$

Majoration : $\sum n^2 |z|^{(n^2)} \leq |z|^1 + 2|z|^2 + 3|z|^3 + 4|z|^4 + 5|z|^5 + \cdots$
$= \sum n|z|^n$ cv. pour $|z|<1$
(exo 39e)

Donc $\sum n^2 z^{(n^2)}$ cv. si $|z|<1$
$z=1$ : $\sum n^2 = \infty$ diverge
rayon de cv. $R=1$

---

exo 41 a) $\sum \frac{n^2+1}{n^4+3} z^n$, $\frac{n^2+1}{n^4+3} \underset{\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$

D'Alembert : $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \sim \left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$
rayon de cv.

b) $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$

$\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, donc l'argument de sin tend vers 0, on peut donc appliquer DL $\sin x \overset{0}{\sim} x$

c.à.d $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

d'Alembert : $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \sim \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

Donc, rayon de cv. $R = \frac{1}{1} = 1$.

---

exo 42

a) $\sum z^{3n} = 1 + z^3 + z^6 + \dots$

$X = z^3$ : $\sum X^n = 1 + X + X^2 + \dots$

série géom. cv. si $|X| < 1$
dv. si $|X| > 1$

c.à.d : cv. si $|z|^3 < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$
dv. si $|z|^3 > 1 \Leftrightarrow |z| > 1$

$\Rightarrow$ rayon de cv. $R = 1$ || $\frac{1}{1-X} = \frac{1}{1-z^3}$

b) $\sum 2^n z^n = \sum (2z)^n$

$X = 2z$ : $\quad \sum X^n$ série géom.

cv. si $|X| < 1$

dv. si $|X| > 1$

càd cv. si $|2z| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{2}$

dv. si $|2z| > 1 \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{2}$

Donc, rayon de cv. $R = \frac{1}{2}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} X^n = \frac{1}{1-X} = \frac{1}{1-2z} \quad \Bigg\| \quad \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n = \frac{1}{1-2z}}$$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{n!}$ ; $\quad X = z^4$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} = \exp(X) \quad \text{cv. pour tout } X$$

$$= \exp(z^4) \quad \text{cv. pour tout } z$$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n / n!$ , $\quad X = 2z$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} = \exp(X) = \exp(2z) \quad \text{cv. partout}$$

e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n X^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} X^n}{n}$$

$X = -z$

$$= -\ln(1+X) = -\ln(1-z)$$

$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n}$ et rayon de cv. 1)

f) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n/(2n)! = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n X^{2n}/(2n)!$
$= \cos(X)$
$= \cos(\sqrt{z})$

"presque" cos, $X = \sqrt{z}$
si $z \geq 0$ (r.d.cv. $\infty$)

si $z \leq 0$ : $X = \sqrt{-z}$

$\sum_{n=0}^{\infty} X^{2n}/(2n)! = ch(X) = ch(\sqrt{-z})$
(r.d.cv. $\infty$)

rayon de cv. est $\infty$

exo 43 a) $\frac{1}{1-2z} = \frac{1}{1-X}$ $X = 2z$

$= \sum_{n=0}^{\infty} X^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$

série géom
rd cv. $|X| < 1$

$|2z| < 1$
$|z| < \frac{1}{2}$

$\boxed{R = \frac{1}{2}}$

b) $\frac{1}{z-5} = \frac{1}{-5+z} = \frac{1}{(-5)\cdot\left(1+\frac{z}{-5}\right)} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{5}}$

$= -\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} z^n$

$X = \frac{z}{5}$, série géom.

r.d.cv. $\left|\frac{z}{5}\right| < 1 \Rightarrow R = 5$
$|z| < 5$

c) $\frac{1}{1+9z^2} = \frac{1}{1-(-9z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-9z^2)^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n z^{2n}$ ; rdv: $|-9z^2| < 1$

$\Leftrightarrow z^2 < \frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow |z| < 1/3$

rayon de cv. $R = \frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{(1+z)^2}$

$\left(\frac{1}{1+z}\right)' = \frac{-1}{(1+z)^2}$

$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$

rayon de cv $= 1$

(série géom)

$\frac{1}{(1+z)^2} = -\left(\frac{1}{1+z}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n\right)'$

$= -\sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n z^n\right)' = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} n z^{n-1}$ , rd cv. $= 1$

(thm du cours : dérivée a le même rayon de cv.)

e) $\ln(2-z) = \ln\left(2\times\left(1-\frac{z}{2}\right)\right) = \ln 2 + \ln\left(1-\frac{z}{2}\right)$

$= \ln 2 + \ln\left(1+\left(-\frac{z}{2}\right)\right)$

$\underset{\text{cours}}{=} \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-\frac{z}{2}\right)^n$

$= \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n2^n}$, rayon de cv.

$\left|\frac{z}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$

rayon de cv : $R = 2$

f) $\exp(2z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n$

la série entière de l'exponentielle converge partout, donc rayon de cv. $R = \infty$

g) $\exp(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$

Comme dans f) : $R = \infty$

44 Montrer que $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$

On sait : $(\cos z)^{(n)} = \begin{cases} \pm \sin z \\ \pm \cos z \end{cases}$ $\quad \| \quad \begin{matrix} |\sin z| \leq 1 \\ |\cos z| \leq 1 \end{matrix}$

$(\cos z)' = -\sin z$
$(-\sin z)' = -\cos z$
$(-\cos z)' = \sin z$
$(\sin z)' = \cos z$

$$R_n(z) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} z^{n+1}$$

et $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq 1$

$$\Rightarrow |R_n(z)| \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Donc, le DL donne bien la série entière de $\cos z$.

---

En déduire la série entière de $\sin z$.

$(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$

$$\sin z = (-\cos z)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}\right)'$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} z^{2n}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2n}{(2n)!} \cdot z^{2n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} z^{2n-1}$$

$$\underset{m=n-1}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1}, \quad R = \infty$$

$(2n-1 = 2(n-1)+2-1 = 2m+1)$