exo 4

a) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}}$

$\sum u_n$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l \begin{cases} <1 \\ =1 \\ >1 \end{cases}$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n}$$

$$= \frac{n+1}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} < 1$$

$\left(\frac{n}{2n} = \frac{1}{2}\right.$ termes dominants$\left.\right)$

La série converge par le critère d'Alembert

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n!}$, $u_n = \frac{\ln n}{n!}$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\ln(n+1)\ n!}{(n+1)!\ \ln n} = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)\ln n}$$

$\sim \frac{1}{n}$

$$= \frac{\ln(n(1+\frac{1}{n}))}{(n+1)\ln n} = \frac{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})}{(n+1)\ln n}$$

$\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ et $\underline{\overset{\to 0}{\frac{1}{n}} \text{ négligeable devant } \overset{\to\infty}{\ln n}}$

il suffit de regarder | $\frac{1}{n} = o(1)$; $1 = o(\ln n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\ln n}}{(n+1)\cancel{\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Conclusion $\sum \frac{\ln n}{n!}$ converge

(On vient de montrer : $\ln n \sim \ln(n+1)$)

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\qquad u_n = \frac{1}{n^2}$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \qquad \left(\frac{n^2}{n^2}\right)$$

Conclusion : Le critère d'Alembert n'est pas utile pour cette question.

On peut rien conclure !

[En fait, la série converge.]

exo5

$$\sqrt[n]{|u_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{?} \ell \begin{cases} <1 \\ =1 \\ >1 \end{cases}$$

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}$$

$$= \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} < 1$$

(Resultat du cours : $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$)

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \text{ converge}}$

c) $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n^2}\right)^n}$ $\qquad \sqrt[n]{|u_n|} = \frac{1+n}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1$

terme dom. : $\frac{n}{n^2}$

Conclusion : $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n^2}\right)^n$ converge

---

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \longrightarrow \frac{1}{1^2} = 1$

Conclusion : on peut rien dire

---

exo 6 b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$, u_n decroissante

$u_n \to 0$

mais : pas une série alternée !!

on ne peut appliquer le critère de séries alternées

---

c) $\sum_{n=\cancel{1}\,2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$; • série alternée

• $u_n = \frac{1}{\ln n}$ décroissante ✓

$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ✓

Donc, le critère de séries alternées donne la convergence.

---

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ • série alternée

• $u_n = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq 0$

On ne peut pas appliquer le critère.

---

exo 7 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $[1, \infty[$

est positive et décroissante

On regarde $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty$

$= \underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)}_{0} + 1 = 1$ converge !

Par le critère de comparaison série/intégrale on conclut que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ $\Big|$ $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ sur $[2,\infty[$ positive, décroissante

$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_{\ln 2}^\infty$

$t = \ln x$
$dt = \frac{1}{x}\,dx$

$\lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$ diverge !

Conclusion : $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ diverge

---

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ (en fait, série géométrique avec $q = \frac{1}{e} < 1$)

$f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, positive décroissante sur $[1,\infty[$

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_1^\infty = \underbrace{\lim_{x\to\infty}(-e^{-x})}_{0} + e^{-1} = \frac{1}{e}$$

converge!

Conclusion: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ converge

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ $\qquad f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$

positive, décroissante

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx - \int_1^\infty \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \left[\ln x\right]_1^\infty - \left[\ln(x+1)\right]_1^\infty$$

$$= \infty - \infty \quad ??$$

$$= \left[\ln x - \ln(x+1)\right]_1^\infty$$

$$= \left[\ln \frac{x}{x+1}\right]_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \ln\frac{1}{2}$$

1

continue!

$$= -\ln\frac{1}{2} = \boxed{\ln 2}$$

l'intégrale converge !

Donc $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge

---

exo 8 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

$\frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n} = \frac{n+1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} < 1$$

(*) cv.

$$\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1 \quad \text{cv. (absolument)}$$

(Une série à termes positifs qui converge converge toujours absolument.)

Rappel $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(e^{\ln n}\right)^{\frac{1}{n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\boxed{\frac{\ln n}{n}}\right) = \exp \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}}_{0}$$

continue

par croissance comparée

$$= \exp 0 = 1$$

(*) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}{\cancel{n}(2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$ ($\frac{1}{n} \to 0$)

b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln\ln n}$

$\lim \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \dots = 1$ d'Alembert n'aide pas

série-intégrale: $f(x) = \frac{1}{x \ln x \ln\ln x}$

positive ✓, décroissante ✓

(dénom. produit de fcts. pos. croissantes)

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x \ln x \ln\ln x}\, dx = \int_{\ln 3}^{\infty} \frac{1}{t \ln t}\, dt$$

$t = \ln x$ | $x = 3$

$dt = \frac{1}{x} dx$ | $t = \ln 3$

$u = \ln t$ | $t = \ln 3$

$du = \frac{1}{t} dt$ | $u = \ln\ln 3$

$$= \int_{\ln\ln 3}^{\infty} \frac{1}{u}\, du$$

$$= \left[\ln u \right]_{\ln\ln 3}^{\infty}$$

$$= \underbrace{\lim_{u \to \infty} \ln u}_{= \infty} - \ln\ln\ln 3$$

$= \infty$

l'intégrale diverge

Conclusion : $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$ diverge

Une série à termes positifs qui diverge diverge vers l'infini.

---

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$, $\quad u_n = (-1)^n n \overset{n \to \infty}{\not\to} 0$

Conclusion : la série diverge

(Resultat du cours : $\sum u_n$ cv. $\Rightarrow u_n \to 0$)

(donc : $u_n \not\to 0 \Rightarrow \sum u_n$ dv.)

---

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n+1}{n^3+2n}}_{>0}$ $\qquad \frac{n+1}{n^3+2n} \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$

Thme sommation d'équivalences :

$\sum$ cv. ssi $\sum \frac{1}{n^2}$ cv. (vrai, Riemann $\alpha > 1$)

---

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ $\qquad$ "1^{∞}" forme indéterminée

Critère de Cauchy : $\sqrt[n]{|u_n|} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{e} < 1$$

Conclusion: La série converge | $\ln(1+x) \overset{0}{\sim} x$

Rappel: $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \exp\Big(n \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\sim \frac{1}{n}}\Big)$

$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{continue}}}{\exp} \lim_{n\to\infty} \underbrace{n\cdot\frac{1}{n}}_{1} = e$ ✓

f) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln\ln n}$,

Critère de série alternée:

$(-1)^n u_n$ avec $u_n = \frac{1}{\ln\ln n}$

u_n positive, decroissante

$u_n \to 0$

La série converge

A-t-on convergence absolue?

Il faut étudier $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln\ln n}$

$\ln n \leq n$

$\Rightarrow \ln\ln n \leq \ln n \leq n$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\ln\ln n} \geq \frac{1}{n}}$

$\sum \frac{1}{n}$ série harmonique est minorant divergent

Conclusion: On a convergence, mais pas convergence absolue.

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!}$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{(n+1)\ (2n+1)!}{(2(n+1)+1)!\ \ n} = \frac{(n+1)\ (2n+1)!}{(2n+3)!\ n}$$

$$= \frac{(n+1)}{(2n+3)(2n+2)n} \sim \frac{n}{2n \cdot 2n \cdot n} = \frac{1}{4n^2} \to 0$$

$$0 < 1$$

Par d'Alembert, la série converge.

[$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$, approximation de Stirling]

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2}\right)^n$ $\quad \sim \frac{n^2}{2n^2}$

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \left(\frac{n^2+1}{2n^2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} < 1$$

Conclusion : La série cv. (abs.) pos.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

Sol 1 : $\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2}\ \frac{1}{n+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\ \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge (série harmonique)

Sol 2 : $\frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{2n}$, $\sum \frac{1}{2n}$ série harmonique diverge

Conclusion: La série diverge (vers l'infini)
(termes positifs)

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

$$\sum_{n=1}^{M} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \sqrt{M+1} - 1 \xrightarrow[M\to\infty]{} \infty$$

Somme diverge! (vers l'infini
termes positifs)

---

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ $\boxed{a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}}$ $\lim a_n = 0$ ✓

$$\sum_{n=1}^{M} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{M+1}} \xrightarrow[M\to\infty]{} 1$$

la série converge (abs.)

$\tilde{k}$) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1-\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}$ $\sum \frac{1}{n}$ diverge

$\Rightarrow$ la série diverge (vers l'infini)
termes positifs

l) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)}$ $\times \frac{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}$ $\Big\|$ $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

alternée ✓

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \longrightarrow 0$$

décroissante

Donc, la série converge par le critère de séries alternées.

Convergence absolue ?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

diverge : $\sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$

série de Riemann divergente.

ou bien :

$$\sum (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

diverge ! (j)

$$\sqrt{n+1} = \sqrt{n\left(1+\tfrac{1}{n}\right)} = \sqrt{n}\,\sqrt{1+\tfrac{1}{n}} \sim \sqrt{n}$$

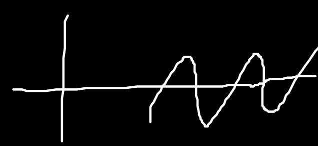
$$\boxed{\sqrt{1+x} \overset{0}{\sim} 1}$$

2 Intégrales généralisées

9 a)

$$\int_0^{\infty} \sin t \, dt = [-\cos t]_0^{\infty}$$

$$= \underbrace{\lim_{t\to\infty} (-\cos t)}_{\text{n'existe pas}} + \underbrace{\cos 0}_{1}$$



Conclusion : l'intégrale ne converge pas.

b)

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^{\infty} = -0 + e^0 = 1$$

L'intégrale converge et vaut 1.

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp|x|\,dx = \int_{-\infty}^{0} \exp|x|\,dx + \underbrace{\int_{0}^{\infty} \exp|x|\,dx}$

$$\int_0^\infty \exp x\,dx = \left[e^x\right]_0^\infty = \infty$$

L'intégrale ne converge pas.

d) $\displaystyle\boxed{\int_0^\infty \underbrace{\exp(-t)}_{f}\,\underbrace{\cos t}_{g}\,dt} = \left[-\exp(-t)\cos t\right]_0^\infty - \int_0^\infty \exp(-t)\cdot \sin t\,dt$

$\exp(-t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

$$= 1 - \int_0^\infty \underbrace{\exp(-t)}_{f}\,\underbrace{\sin t}_{g}\,dt$$

$$= \underbrace{1 - \left[-\exp(-t)\sin t\right]_0^\infty} - \boxed{\int_0^\infty \exp(-t)\cos t\,dt}$$

$$\Rightarrow 2\int_0^\infty \exp(-t)\cos t\,dt = 1 + \left[\exp(-t)\sin t\right]_0^\infty = 1$$

$\exp(-\infty) = 0$; $\sin 0 = 0$

$$\int_0^\infty \exp(-t)\cos t\,dt = \frac{1}{2}$$

$$|\exp(-t)\cos t| \leq \exp(-t)$$

et on sait $\displaystyle\int_0^\infty \exp(-t)\,dt$ converge

Conclusion : L'intégrale converge et vaut $\frac{1}{2}$

e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = ?$

$$\int x^{-\alpha}\,dx = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \qquad \alpha \neq 1$$

Cas 1 : $\alpha \neq 1$: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^\infty$

$$\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } -\alpha+1<0 \\ \infty & \text{si } -\alpha+1>0 \end{cases}$$

Si $\alpha<1$: la limite n'existe pas

Si $\alpha>1$: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$

Cas 2 : $\alpha = 1$: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$ n'existe pas

Conclusion $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$ si $\alpha>1$

diverge sinon

---

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \underset{\text{si } \alpha \neq 1}{=} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{1-\alpha}$ si $\alpha<1$

$$\lim_{x\to 0} x^{-\alpha+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } -\alpha+1>0 \\ \infty & \text{si } -\alpha+1<0 \end{cases}$$

diverge $\alpha>1$

Si $\alpha=1$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x} = [\ln x]_0^1$ | $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln x$ diverge !

Conclusion : $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$ si $\alpha < 1$

diverge sinon.

---

exo 10 a) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} = \int_0^1 \frac{1}{(1-x)(1+x)}\,dx$

$= \int_0^1 \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x} \right) dx$

$= \frac{1}{2} \Big[-\underbrace{\ln(1-x)}_{\ln 0 \,-\, \ln 1} + \underbrace{\ln(1+x)}_{\ln 2 \,-\, \ln 1 \text{ constante}} \Big]_0^1$

$\lim_{x \to 1^-} \ln(1-x) = -\infty$ ne converge pas

---

exo 15 a) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$

Le "problème" est à zéro, donc on cherche un équivalent à zéro.

$x^2 + \sqrt{x} \underset{0}{\sim} \sqrt{x}$

$\frac{1}{x^2+\sqrt{x}}$ positif

Il suffit donc d'étudier $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

Intégrale de Riemann $\alpha < 1$ sur $]0,1[$ converge

Conclusion : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$ converge

b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$

Équivalent à ∞ : $x^2+\sqrt{x} \overset{\infty}{\sim} x^2$

Il suffit donc d'étudier $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

Intégrale de Riemann : $\alpha > 1$ sur $]1,\infty[$

converge ! $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$ converge

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx}_{a)\ \checkmark} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx}_{b)\ \checkmark} \quad \text{converge !!}$$