TD 2 decembre

Revision : CC1 de 2018, exo 3

a) $S_4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$ convergence ?

$$\frac{2}{(2n+1)\cdot(2n+3)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{2n\cdot 2n} = \frac{1}{2n^2}$$

$\left(\frac{2}{4n^2} = \frac{1}{2n^2} \right)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \underline{\underline{\frac{1}{2n^2}}}$ converge parceque c'est une série de Riemann à l'expos. > 1

[preuve par comparaison série-intégrale]

(Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$ converge

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} \text{ converge}$$

$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2} \text{ n'est pas définie} \right)$

b) Calculer la somme de la série.

Indication : $\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \underbrace{\frac{1}{(2n+1)} - \frac{1}{(2n+3)}}_{\frac{(2n+3)-(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}}$

Trop optimiste:

$$\left[\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+3}\\ &= \infty - \infty \quad ??\end{aligned}\right]$$

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2n+1} - \sum_{n=0}^{N}\underline{\frac{1}{2n+3}}$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\underline{\frac{1}{2n+1}} - \sum_{k=1}^{N+1}\underline{\frac{1}{2k+1}}$$

$$\boxed{k=n+1}$$

$$= \frac{1}{2\cdot 0+1} - \frac{1}{2\cdot(N+1)+1} = 1 - \frac{1}{2N+3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{1}{2N+3}\right) = 1$$

Alternative:

$$\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\dots+\left(\cancel{\frac{1}{2N+1}}-\frac{1}{2N+3}\right)$$

$$= 1-\frac{1}{2N+3}$$

2019/20, CC2

Exo 4

1) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t^{2/3}(3+t+\ln t)}\,dt$

denominateur: $t^{2/3} > 0$, $3+t+\ln t \geq 3+1 > 0$ ✓

seule question de cv. vers l'infini

(fct. est continue)

équivalent à ∞: $\displaystyle \frac{1}{t^{2/3}.(3+t+\ln t)} \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2/3}\cdot t}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^{5/3}}\,dt = \left[\frac{1/t^{2/3}}{-2/3}\right]_1^{\infty} = -\frac{3}{2}\underbrace{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{2/3}}}_{\to 0} + \frac{3}{2}$$

"$t^{-5/3}$"

$= \frac{3}{2}$ converge

donc l'intégrale équiv. converge aussi

Alternative:

$0 < \frac{1}{t^{2/3}(3+t+\ln t)} < \frac{1}{t^{2/3}}$, $\int \frac{1}{t^{2/3}}$ cv. ...

---

2) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1+2\cos t}{t^{2/3}(3+t+\ln t)}\,dt$

$|1+2\cos t| \leq 1+|2\cos t| \leq 3$

$$\left|\frac{1+2\cos t}{t^{2/3}(3+t+\ln t)}\right| \leq \frac{3}{t^{2/3}(3+t+\ln t)}$$

$$\int_1^\infty \frac{3}{t^{2/3}(3+t+\ln t)}\,dt$$ converge par 1).

2017/18, CC1, exo 1

Étudier la cv.

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{1+2\sin t}{1+t^2}\,dt,$$ fct est continue,

$1+t^2>0$, donc seul problème à l'infini

$$|1+2\sin t| \leq 1+|2\sin t| \leq 3$$

$|I_1|$ est majorée par $$\int_0^\infty \frac{3}{1+t^2}\,dt$$

$$= \left[3\arctan t\right]_0^\infty =$$

$$= 3\lim_{t\to\infty}\arctan t - 0$$

$$= 3\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

Conclusion: I_1 converge.

Remarque: si on majore $|\sin t| \leq 1$ et après ça diverge, on peut rien conclure.

Dans ce cas, l'exercice est très difficile.

Exemple: $$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt \quad (\text{cv.})$$

$$\int_{\pi n}^{\pi(n+1)}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t^{3/2}}\,dt$$

fct. continue, dénom $= 0$ pour $t=0$

$e^{-t} \overset{0}{\sim} 1-t$

$e^{-2t} \overset{0}{\sim} 1-2t$

$e^{-t}-e^{-2t} \sim (1-t)-(1-2t) = t$

équivalent à 0 : $\dfrac{e^{-t}-e^{-2t}}{t^{3/2}} = \dfrac{t}{t^{3/2}} = \dfrac{1}{t^{1/2}}$

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}}\,dt = \left[\frac{t^{1/2}}{1/2}\right]_0^1 = 2 \checkmark$$

Intégrale de Riemann ($1/2 < 1$ expos.)

Conclusion : l'intégrale converge.

DL de sin, cos, ln, exp, (tan), $\sqrt{1+x}$

Retour aux suites de fonctions !

(19) $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n} + \arctan x$, $x \in \mathbb{R}^+$

$g_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$, $x \in \mathbb{R}^+$

a) cv. simple

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \arctan x$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

b) cv. uniforme sur $[0,1]$?

f_n cv. unif.

$$g_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$$

g_n cv. unif ? NON

parce que g_n continue et limite simple n'est pas continue

cv. uniforme sur $]0,1]$

f_n cv. unif. parce que $]0,1] \subset [0,1]$ et deja cv. unif. sur $[0,1]$

g_n ? limite simple est constante 1 sur $]0,1]$

$$\lim_{x\to 0^+} g_n(x) = g_n(0) = 0 \overset{n\to\infty}{\not\to} 1$$

mais $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$

pas de cv. uniforme (parce qu'on ne peut pas échanger $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0^+}$)

Alternative:

$$\|g - g_n\|_\infty = \left\|1 - \frac{nx}{1+nx}\right\|_\infty = \left\|\frac{1}{1+nx}\right\|_\infty = 1 \not\to 0$$

$= \|g_n - g\|_\infty$ pas de cv. uniforme

cv. uniforme sur $[a,1]$? $0<a<1$ fixe

f_n cv. uniforme $[a,1] \subset [0,1]$ où on a cv. uniforme

$$\|g - g_n\|_\infty = \left\|\frac{1}{1+nx}\right\|_\infty = \frac{1}{1+na} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\uparrow$

fct. décroissante

Donc, g_n cv. uniformément sur $[a,1]$, pour $0<a<1$ arbitraire

---

c) Convergent-elles simplement et uniformément sur $[1,\infty[$?

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n} + \arctan x$$

cv. simple: ✓ $\lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\frac{x}{x+n}}_{\to 0} + \arctan x\right) = \arctan x = f(x)$

$$\|f_n - f\|_\infty = \left\|\frac{x}{x+n} + \arctan x - \arctan x\right\|_\infty$$

$$= \left\|\frac{x}{x+n}\right\|_\infty = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\left(\frac{x}{x+n}\right)' = \frac{(x+n)\cdot 1 - x\cdot 1}{(x+n)^2} = \frac{n}{(x+n)^2} > 0, \text{ donc } \nearrow$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+n} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} = 1$$

Comme la suite constante $1, 1, 1, \ldots$ ne tend pas vers 0, f_n ne cv. pas unif.

$$g_n(x) = \frac{nx}{1+nx}, \quad x \in [1,\infty[$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+nx} = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{nx} = 1 = g(x)$ lim. simple

$$\|g_n - g\|_\infty = \left\| \frac{nx}{1+nx} - 1 \right\|_\infty = \left\| -\frac{1}{1+nx} \right\|_\infty$$

$$= \left\| \frac{1}{1+nx} \right\|_\infty = \frac{1}{1+n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\rightarrow$ fct. decroissante, valeur max. pour $x=1$

g_n cv. unif.

---

exo 20 $\quad f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \sin(nx^2)\exp(-nx^2)$$

a) Mq. f_n cv. simplement vers ?

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sin(nx^2)}_{\text{bornée}}\, \underbrace{\exp(-nx^2)}_{\to 0,\ \text{si } x\neq 0} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$\uparrow$ suite $=0$
$\sin(0)=0$

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in [-1,1]$$

b) <u>Methode 1</u> :

$$\|f_n - f\|_\infty = \|\sin(nx^2)\exp(-nx^2)\|_\infty$$

$$(\sin(nx^2)\exp(-nx^2))'$$

$$= \cos(nx^2)\cdot 2nx \cdot \exp(-nx^2) + \sin(nx^2)\exp(-nx^2)\cdot(-2nx)$$

$$= 2nx\exp(-nx^2)\cdot(\cos(nx^2) - \sin(nx^2))$$

derivée $=0$: si $x=0$ ou $\cos(nx^2) = \sin(nx^2)$

c.à.d $x=0$ ou $\tan(nx^2)=1$

$\sin = \cos$

$\Leftrightarrow \frac{\sin}{\cos} = 1 \Leftrightarrow \tan = 1$

$$nx^2 = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right)}$$

$$f_n\left(\pm\sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right)}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right)\exp\left(-\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right)\right)$$

$$= \underbrace{\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \exp\left(-\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right)\right)}_{\leq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$f(\cdots) = 0$$

on cherche le max $\|f_n - f\|_\infty = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{4}\right) \not\to 0$

maximum dans $\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{4}} \in [-1,1]$

Conclusion : pas de cv. unif.

Méthode 2 : $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow nx_n^2 = 1$

$$|f(x_n) - f_n(x_n)| = |\sin(1)\exp(-1)| > 0$$

constante

$$\|f - f_n\|_\infty \geq |f(x_n) - f_n(x_n)| > 0$$

$\not\to 0$

pas de cv. uniforme

---

c) $a \in]0,1[$ fixe

Mq f_n cv. unif. sur $[a,1]$

$$\|f_n - f\|_\infty = \|\sin(nx^2)\exp(-nx^2)\|_\infty$$
$$\leq \underbrace{\|\exp(-nx^2)\|_\infty}_{\text{fct. decroissante}} = \exp(-na^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Conclusion: cv. uniforme.

---

(21) $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{1+x^n}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

cv. simple:
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n e^{-x}}{1+x^n} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{2e} & \text{si } x = 1 \end{array} \right\} = f(x)$$

sur $[0,1]$, la limite simple n'est pas continue (elle ne ~~prend pas les valeurs intermédiaires~~ entre 0 et $\frac{1}{2e}$)

Comme $f_n(x)$ continue, la cv. n'est pas uniforme

---

sur $[0,1[$

$x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ $\qquad x^n = \frac{1}{2}$

$\sqrt[n]{c} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, $c \in \mathbb{R}_+^*$

$$f_n(x_n) = \frac{\frac{1}{2} e^{-\sqrt[n]{\frac{1}{2}}}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\sqrt[n]{\frac{1}{2}}}}{3}$$

$f(x_n) = 0$

$$\|f - f_n\|_\infty \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{e^{-\sqrt[n]{\frac{1}{2}}}}{3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{e^{-1}}{3} = \frac{1}{3e} \neq 0$$

Méthode 2 : $\quad f_n - f = \dfrac{x^n e^{-x}}{1+x^n}$

$$\left(\frac{x^n e^{-x}}{1+x^n}\right)' = \frac{(1+x^n)\left(nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x}\right) - x^n e^{-x} \cdot n x^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$

$$= \frac{x^{n-1}e^{-x} \cdot \left((1+x^n)(n-x) - n x^n\right)}{(1+x^n)^2}$$

$$= \frac{x^{n-1}e^{-x}\left(n - x + \cancel{n x^n} - x^{n+1} - \cancel{n x^n}\right)}{(1+x^n)^2}$$

valeurs critiques : $x=0$ ou $\boxed{x^{n+1} + x = n}$

$x \in [0,1]$

$x^{n+1} + x \leq 2$

pas de sol. si $x > 2$

donc $\nearrow$

$$\|f_n - f\|_\infty = \underset{x=1}{\frac{e^{-1}}{2}} = \frac{1}{2e} \not\to 0$$

sur $[0,a]$, $0 < a < 1$.

Calcul précédent :

$f_n - f \nearrow$, donc $\|f_n - f\|_\infty = f_n(a) \left(= \dfrac{a^n e^{-a}}{1+a^n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

calcul de limite simple

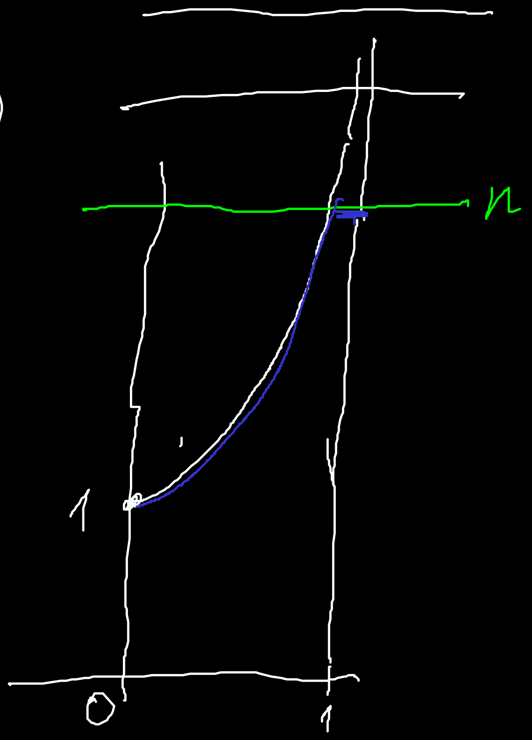
Conclusion : $f_n \to f$ unif sur $[0,a]$, $0<a<1$

mais pas sur $[0,1[$, $[0,1]$

22

$$f_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$$

sur $[0,1[$



a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

pour $x<1$ fixe

si n très grand, $n > \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

donc $\min\left(n, \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = f(x)$

limite simple

b) $\lim_{x\to 1^-} f_n(x) = n$

$\left(f_n(x) = n \quad \text{si} \quad x > 1 - \frac{1}{n^2} \right)$

c) Que peut-on en conclure sur la suite (f_n) ?

$\|f_n(x)\|_\infty = n$ bornée

$\|f(x)\|_\infty = \infty$ pas bornée

$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty$

$\boxed{\text{thme : } f_n \text{ bornée et } f_n \to f \text{ unif., alors } f \text{ est bornée}}$

Conclusion : pas de cv. uniforme.

(23) $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n n x^2}$ sur $[0,1]$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n x}{1+2^n n x^2}$

$\underset{x\neq 0}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n x}{2^n n x^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{nx} = 0$

Si $x=0$: $\lim 0 = 0$

Limite simple: $f(x)=0$, $x\in[0,1]$

b) $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$

$= \int_0^1 \frac{2^n x}{1+2^n n x^2}\,dx$

$= \left[\ln(1+2^n n x^2)\frac{1}{2n}\right]_0^1 =$

$\left[(1+2^n n x^2)' = 2\cdot 2^n n x \right]$

$= \ln(1+2^n n)\frac{1}{2n} - \ln(1)\frac{1}{2n}$

$= \frac{1}{2n}\ln(2^n n+1)$

$\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(2^n n+1)}{2n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2^n n) + \ln\left(1+\frac{1}{n2^n}\right)}{2n}$$

$$\underset{DL}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2^n n) + \frac{1}{n2^n}}{2n}$$

$\ln\left(2^n n\left(1+\frac{1}{2^n n}\right)\right)$
$= \ln(\quad) + \ln(\quad)$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2^n) + \ln n}{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\ln 2 + \ln n}{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\ln 2}{2n} = \frac{\ln 2}{2}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{\ln 2}{2}}$$

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

$\frac{\ln 2}{2} \neq 0 \Rightarrow$ pas de cv. uniforme

c) $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n n x^2}$, $f(x) = 0$

$$\|f_n - f\|_\infty = \left\|\frac{2^n x}{1+2^n n x^2}\right\|_\infty$$

$$\left(\frac{2^n x}{1+2^n n x^2}\right)' = \frac{(1+2^n n x^2)\cdot 2^n - 2^n x \cdot 2^n n \cdot 2x}{(1+2^n n x^2)^2}$$

$$= \frac{2^n + 2^{2n} n x^2 - 2^{2n} n x^2 \cdot 2}{(1+2^n n x^2)^2}$$

$$= \frac{2^n - 2^{2n} n x^2}{(1+2^n n x^2)^2}$$

$:2^n$

zéro si $\underline{2^n = 2^{2n} n x^2}$ càd $1 = 2^n n x^2$

$$x = \sqrt{\frac{1}{n 2^n}}$$ (signe + parce que $x \in [0,1]$)

$$f_n\left(\sqrt{\frac{1}{n2^n}}\right)$$

$$= \frac{2^n \sqrt{\frac{1}{n2^n}}}{1 + 2^n n \frac{1}{n 2^n}} = \frac{2^n}{\sqrt{n2^n}\cdot(1+1)} = \frac{\sqrt{2^n}}{2\sqrt{n}}$$

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{n2^n}}\right) = 0$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & 0 & & \sqrt{\frac{1}{n2^n}} & & 1 \\
\hline
f_n(x)-f(x) & 0 & \nearrow & \underbrace{\frac{\sqrt{2^n}}{2\sqrt{n}}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty} & \searrow & \underbrace{\frac{2^n}{1+n2^n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}
\end{array}$$

au moins pour n grand

$$\|f_n - f\|_\infty = \frac{\sqrt{2^n}}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty \neq 0$$

Conclusion : pas de cv. uniforme.

---

24 $\quad f_n(x) = \dfrac{ne^{-x} + x^2}{n + x^2}$, sur $\mathbb{R}$, $n \geq 1$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{ne^{-x}}{n} = \underset{\overset{\shortparallel}{f(x)}}{e^{-x}}$

b) $a<b$, $a,b \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{\cancel{ne^{-x}} + x^2 - \cancel{ne^{-x}} - x^2e^{-x}}{n+x^2} \right|$$

$$= \frac{x^2\,|1-e^{-x}|}{n+x^2} \; ; \text{ le numérateur est}$$

fonction continue sur $[a,b]$, prend un maximum M

Donc $|f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{M}{n+x^2} \leq \dfrac{M}{n} \longrightarrow 0$

On a donc convergence uniforme sur $[a,b]$

d) Calculer la limite

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

$$\underset{b)}{=} \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1}+1$$

$$= 1-\frac{1}{e}$$

c) Soit $a \in \mathbb{R}$

Mq : f_n ne cv. pas unif. sur $[a,\infty[$, $a \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{x^2(1-e^{-x})}{n+x^2}\right|$$

$x_n = \sqrt{n}$: $\|f_n-f\|_\infty \geq |f_n(x_n)-f(x_n)|$

$$= \frac{n(1-e^{-\sqrt{n}})}{n+n} =$$

$$= \frac{1}{2}(1-\underbrace{e^{-\sqrt{n}}}_{\to 0}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq 0$$

Conclusion : f_n ne cv pas unif. vers f sur $]a, \infty[$.