TD Analyse pour l'économie

mercredi 25 novembre

(10) b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$

$(\sin x \overset{0}{\sim} x)$

$|\sin x| \leq 1$

$$\left|\frac{\sin^2 x}{x^2}\right| = \frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

majorant cv.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = 1$$

Riemann! converge

Donc, comme $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ est continue et majorée par $\frac{1}{x^2}$ l'intégrale converge.

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{1+x^2}\,dx$ $\qquad \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1+x^2} = \infty \neq 0$

ne cv. pas

---

c') $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x^2}\,dx$

$$\left|\frac{e^{-x}}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}, \quad \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \left[\arctan x\right]_0^\infty$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{converge}$$

L'intégrale converge!

(11) Évaluer : $\left(\lim_{x\to\infty} \text{poly} \cdot e^{-x} = 0 \text{ par croissance comparée}\right)$

a) $$\int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx = \left[x^2(-e^{-x})\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2x \cdot e^{-x}\,dx$$

devient plus simple si on dérive

ne change pas trop dans primitive

$$= 0 - 0 + \left[2x\cdot(-e^{-x})\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2\cdot e^{-x}\,dx$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 2\left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 2$$

b) $$\int_0^\infty x e^{-x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{2}\cdot e^{-y}\,dy = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$y = x^2$

$dy = 2x\,dx$

c) $$\int_0^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{y^2}\,dy = 2\int_0^\infty \frac{1}{y^2}\,dy$$

$y = \ln x$ | $x = 0 \quad y = -\infty$

$dy = \frac{1}{x}\,dx$ | $x = \infty \quad y = \infty$

Intégrale de Riemann : $$\int_0^\infty \frac{1}{y^2}\,dy = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{y^2}\,dy}_{\text{div.}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{y^2}\,dy}_{\text{cv.}}$$

donc $\int_0^\infty$ ne cv. pas.

Donc, l'intégrale ne converge pas !

(12) a) $x^3 + x^5 \overset{\infty}{\sim} x^5$

b) $x^3 + x^5 \overset{0}{\sim} x^3$

c) $3^n + 5^n + \ln n + n^2 \sim 5^n$

$\left(5^n > 3^n > n^2 > \ln n\right)$

d) $\underbrace{(x^3+x^5)}_{\sim x^3}\underbrace{(x^2+x^7)}_{\sim x^2} \overset{0}{\sim} x^3 \cdot x^2 = x^5$

$\hookrightarrow \underline{x^5} + x^{10} + x^7 + x^{12}$

$\boxed{\sin x \overset{0}{\sim} x}$

$\cos x \overset{0}{\sim} 1$

e) $\underbrace{(x^3+x^5)}_{x^3}\underbrace{\sin x}_{x} \overset{0}{\sim} x^3 \cdot x = x^4$

f) $(x^3+x^5)\cos x \overset{0}{\sim} x^3 \cdot 1 = x^3$

g) $\sqrt{\underbrace{x^3+x^5}_{\sim x^5}} \overset{\infty}{\sim} \sqrt{x^5} = x^{5/2}$

Pourquoi: $\sqrt{f(x)+g(x)} = \sqrt{g(x)} \cdot \sqrt{\boxed{\frac{f(x)}{g(x)}} + 1}$ $\quad \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x\to\infty} 0$

$f(x) = o(g(x))$ $\quad \sim \sqrt{g(x)}$

$f(x), g(x) \geq 0$

$f(x) = o(g(x))$ pour $x \to \infty$ si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

h) $\frac{n^5+1}{n^4+n^3+2} \overset{\infty}{\sim} \frac{n^5}{n^4} = n$

$\underline{\sin x \overset{0}{\sim} x}$

13) a) $\sin\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{\to 0}\right) \overset{\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

b) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}\cos\frac{\pi}{4}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Big\| \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{\to 0} \overset{\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

terme dominant

Alternative : $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Comme $\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0, \infty$, alors $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \overset{\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\sqrt{n+2}\,\sin\left(\pi + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

$$= \sqrt{n+2}\left(\underbrace{\sin\pi}_{0}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) + \sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}\underbrace{\cos\pi}_{-1}\right)$$

$$= -\sqrt{n+2}\cdot\sin\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{\to 0} \overset{\infty}{\sim} -\sqrt{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim -\sqrt{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = -1$$

d) $e^{n^2+1+\frac{1}{n}} = e^{n^2}\cdot e^1\cdot e^{\frac{1}{n}} \overset{\infty}{\sim} e^{n^2}\cdot e\cdot 1 = \boxed{e^{n^2+1}}$ (avec $\frac{1}{n} \to 0$)

$\boxed{\exp(x) \overset{0}{\sim} 1}$

14

a) $\cos x - 1 \overset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$

DL : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots$

b) $e^x - 1 - x \overset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

DL : $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$

c) $\cos x - \sqrt{1-x^2}$

$\cos x \overset{0}{\sim} 1$

$\to \cos x - 1 \overset{0}{\sim} 0$ faux

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 1 \overset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \overset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$\boxed{2! = 2}$ $\boxed{3! = 6}$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \overset{0}{\sim} 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \cdots$$

$$(1+x)^\alpha \overset{0}{\sim} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-3)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\sqrt{1+x} \overset{0}{\sim} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots$$

$$\cos x \overset{0}{\sim} 1 - \frac{x^2}{2} \dots$$

$$\cos x - \sqrt{1-x^2} \overset{0}{\sim} \left(\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{24}\right) - \left(\cancel{1} + \cancel{\frac{(-x^2)}{2}} - \frac{(-x^2)^2}{8}\right)$$

$$\overset{0}{\sim} \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{8} = \frac{x^4(1+3)}{24} = \boxed{\frac{x^4}{6}}$$

d) $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \overset{\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ $\qquad \ln(1+x) \overset{0}{\sim} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots$

$\frac{1}{n} \to 0$

e) $\ln\left(1+ \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}_{\to 0}\right) - \frac{1}{n} \overset{\infty}{\sim} \left(\cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2}{2} - \cancel{\frac{1}{n}}$

$$\overset{\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^2} \overset{\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

f) $\boxed{\ln(1+n)} = \ln\left(n \cdot \left(\frac{1}{n}+1\right)\right) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \overset{0}{\sim} \boxed{\ln n}$

$\downarrow 0$

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \overset{0}{\sim} \frac{1}{n}$ négligeable devant $\ln n$

$\frac{1}{n} \to 0$

g) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{\infty}{\sim} e$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

$$\Big(\lim \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n =$$
$$= \lim \exp\left(n \cdot \ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\right)$$
$$= \exp \lim \left(n \cdot \tfrac{1}{n}\right)$$
$$= \exp(1) = e \Big)$$

(15) d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1+x^3}{2+x^5}\,dx$

à 0 : $f(x) = \frac{1}{2}$ continue

seul problème à ∞.

$\displaystyle\frac{1+x^3}{2+x^5} \underset{\infty}{\sim} \frac{x^3}{x^5} = \frac{1}{x^2}$

[$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ ne converge pas] problème à 0 mais on regarde ∞

$\displaystyle\boxed{\int_0^1 \frac{1+x^3}{2+x^5}\,dx \text{ existe}}$

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge (Riemann, $2>1$) l'exposant $=2$, ce qui est >1

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ cv si $\alpha>1$

$\displaystyle\Rightarrow \boxed{\int_1^{\infty} \frac{1+x^3}{2+x^5}\,dx \text{ converge}}$

$\displaystyle\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{1+x^3}{2+x^5}\,dx$ converge

(15) e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-\cos x}\,dx$

dénom $=0$ pour $x=0$

$\displaystyle\frac{1}{1-\cos x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x^2}$ ($\cos x$: $1-\frac{x^2}{2}$)

$\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{x^2}\,dx$ ne converge pas

$\alpha>1$ ds l'intégrale de Riemann sur $[0,1)$

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^{x^2}-1}\,dx$ $\displaystyle\frac{1}{e^{x^2}-1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{1+x^2-1} = \frac{1}{x^2}$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ ne converge pas

(16) a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+2}{n^4+5}$

$$\frac{n^3+2}{n^4+5} \overset{\infty}{\sim} \frac{n^3}{n^4} = \frac{1}{n}$$

$\sum \frac{1}{n}$ série harmonique diverge

Conclusion : diverge

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3}{5^n+1}$

$$\frac{2^n+3}{5^n+1} \sim \frac{2^n}{5^n} = \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ série géométrique avec $q = \frac{2}{5} < 1$

converge

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3}{5^n+1}$ converge

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\ln n}{n^4+5}$

$$\frac{n+\ln n}{n^4+5} \overset{\infty}{\sim} \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}$$

$\sum \frac{1}{n^3}$ série de Riemann exposante $= 3 > 1$, converge

Conclusion : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\ln n}{n^4+5}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$\frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \overset{\infty}{\sim} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$$

$\frac{1}{n} \to 0$

$\sum \frac{1}{n^2}$ série de Riemann à l'exposant $= 2 > 1$

Conclusion : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ converge

(17) a) $a > 0$ fixé.

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx$$ Montrer la convergence

Si $a \geq 1$, $x^{a-1} e^{-x}$ est continue sur $[0,1]$

donc $\boxed{\int_0^1 \text{ existe}}$

Si $a < 1$ $\quad x^{a-1} e^{-x} \leq x^{a-1} = \dfrac{1}{x^{1-a}}$

$\underbrace{x^{a-1} e^{-\frac{x}{2}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{e^{-\frac{x}{2}}}_{\text{int. cv.}}$

$1-a < 1$ donc $\int_0^1 \frac{1}{x^{1-a}} dx$ existe (int. de Riemann)

$\int_1^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$,

$\boxed{\dfrac{x^{a-1}}{e^{x/2}} \xrightarrow{x \to \infty} 0}$

pour x grand: $x^{a-1} e^{-x} < e^{-x/2}$

et $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x/2}\, dx = \left[\frac{e^{-x/2}}{-\frac{1}{2}}\right]_1^\infty = 2e^{-1/}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$ converge

b) Mq: $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, $\quad a > 0$

$$\Gamma(a+1) = \int_0^\infty x^a e^{-x} dx \underset{\text{IPP}}{=}$$

$$= \Big[\underbrace{x^a}_{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ si } x=0}} (-e^{-x})\Big]_0^\infty + \int_0^\infty a x^{a-1} e^{-x} dx$$

$$= a\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx = a\,\Gamma(a)$$

c) $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots$

$$= n(n-1)\cdots 1\cdot\Gamma(1) = n!$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$$

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$$

Suites de fonctions

(18) Calculer la limite et décider si la convergence est uniforme.

a) $f_n :]0,1] \to \mathbb{R}$ avec $\boxed{f_n(x) = \frac{1}{nx}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx} = 0$ donc $f(x) = 0$ limite simple

cv. uniforme ?

$\|f_n - f\|_\infty = \|\frac{1}{nx}\|_\infty$ n'existe pas

x	0	1
f_n	∞	$\searrow \frac{1}{n}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{nx} = \infty$

$\boxed{\text{pas de cv. uniforme}}$

$(\|f_n - f\|_\infty = \infty \not\to 0)$

OU

$$\odot \quad x_n = \frac{1}{n} \in]0,1], \quad f_n(x_n) - f(x_n) = \frac{1}{n \cdot \frac{1}{n}} - 0 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \|f_n - f\|_\infty \geq 1 \quad \Rightarrow \not\to 0$$

$$\boxed{\text{pas de cv. uniforme}}$$

b) $f_n : [1,2] \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = \frac{1}{nx}$

($\frac{1}{n} \notin [1,2]$ donc ne marche pas), $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{nx} = 0$

$f(x) = 0$

$$\|f_n - f\|_\infty = \left\|\frac{1}{nx}\right\|_\infty$$

x	1		2
$f_n - f$	$\frac{1}{n}$	$\searrow$	$\frac{1}{2n}$

si $x \nearrow \Rightarrow \frac{1}{x} \searrow \Rightarrow \frac{1}{nx} \searrow$

$$\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Conclusion: cv. uniforme

c) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = \frac{1}{n^2x^2+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2x^2+1} = 0$ si $x \neq 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2x^2+1} = 1$ si $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

la limite simple

$\odot$ f n'est pas continue

f_n sont continue comme fractions rationnelles

$\Rightarrow$ pas de cv. uniforme

OU

$\odot$ $x_n = \frac{1}{n}$ $\quad f_n(x_n) - f(x_n) = \frac{1}{2} \not\to 0$

pas de cv. uniforme

OU

$\odot$ $f_n(x) = \frac{1}{n^2x^2+1}$, $\quad f_n'(x) = \frac{-2n^2x}{(n^2x^2+1)^2}$

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		∞
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$\|f_n - f\|_\infty = 1 \not\to 0$

$(f_n(x) - f(x) = 0$ pour $x = 0$

$\sup = 1$

---

d) $f_n : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = \frac{1}{n^2x^2+1}$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad f(x) = 0, \quad f : [1,\infty[\to \mathbb{R}$

x	1		∞
$f_n(x)$	$\frac{1}{n^2+1}$	$\searrow$	0

$\Rightarrow \|f_n - \underbrace{f}_{0}\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^2+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

On a cv. uniforme sur $[1,\infty[$

---

e) $f_n : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = \exp(-nx)$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \left.\begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}\right] f(x)$

limite simple

$f_n(x)$ continue (parce que exp continue sur $\mathbb{R}$)
et $f(x)$ n'est pas continue (saut à $x=0$)

Donc, la cv. ne peut pas être uniforme.

f) $f_n : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = \exp(-nx)$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ $\qquad f(x)=0, \quad f : [1,\infty[\to \mathbb{R}$

$(\frac{1}{n} \notin [1,\infty[\,!)$

$f_n(x) - f(x) = \exp(-nx)$ décroissante sur $[1,\infty[$

donc $\|f_n(x) - f(x)\|_\infty = \exp(-n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$
cv. uniforme !

g) $f_n : [1,2] \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = \exp(-nx)$
On trouve aussi $f(x) = 0, \quad f : [1,2] \to \mathbb{R}$

$\|f_n(x) - f(x)\|_\infty = \|\exp(-nx)\|_\infty = \exp(-n) \to 0$ ✓

cv. uniforme !

19 $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x}{x+n} + \arctan(x)$
$g_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$

a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x}{x+n} + \arctan(x)\right) = \arctan(x)$

$f(x) = \arctan(x)$ est la limite simple

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+nx} = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } \boxed{x>0} \end{cases}$$ est limite simple

b) cv. uniforme sur $[0,1]$?

$$f_n(x) - f(x) = \frac{x}{x+n}$$

$$\left(\frac{x}{x+n}\right)' = \frac{(x+n)\cdot 1 - x\cdot 1}{(x+n)^2} = \frac{n}{(x+n)^2} > 0$$

$$\| f_n(x) - f(x) \|_\infty = \frac{1}{1+n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\Rightarrow$ convergence uniforme