$\boxed{\text{TD Analyse pour l'économie}}$

Mercredi 4 novembre

groupe A

(Theresia Eisenkölbl)

exo 1 a. FAUX (série harmonique
résultat du cours)

b. FAUX (série géom, $|q|>1$)

c. VRAI (résultat du cours)

d. VRAI

$$\sum (-1)^n u_n \Rightarrow (-1)^n u_n \to 0$$
$$\Rightarrow \underbrace{(-1)^n}_{\text{borné}} \cdot \underbrace{(-1)^n \cdot u_n}_{\to 0} \to 0$$

e. FAUX

$\boxed{\sum \frac{1}{n}}$ $u_n \to 0$, mais div.

f. FAUX (+ u_n décroiss → critère Leibniz)

$\boxed{\text{Contre-exemple}}$

$u_n \to 0$, $u_n > 0$, <u>pas décroissante</u>

$$u_{2n} = \frac{1}{n} \quad , \quad u_{2n+1} = \frac{1}{2^n}$$

$u_n \to 0$ ✓ $(u_{2n} \to 0, \ u_{2n+1} \to 0)$

$u_n > 0$ ✓

$$-1, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \dots$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$

$$-u_1 \quad u_2 \quad -u_3$$

$$\sum u_{2n} = \sum \frac{1}{n} = \infty \ ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{séries dv} \\ - \text{ séries CV} \\ = \text{ séries dv.} \end{array}}$

$\sum (-1)^n u_n = \infty$

parce que la somme finie de termes impairs ne balancent jamais la série harmonique $(\infty - 2 = \infty)$

g. VRAI

Resultat du cours

h. FAUX

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \text{ diverge} \ ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-n) \text{ diverge}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-n) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \text{ converge}$$

---

f. Autre Contre-exemple:

$$u_{2n-1} = \frac{1}{n} \qquad u_{2n} = \frac{1}{2n}$$

$$\underbrace{-1 + \frac{1}{2}} \underbrace{- \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} \underbrace{- \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \dots$$

$$-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}-\dots$$

$$=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\right) \quad \text{diverge}$$

---

exo 2) a) $\sum \frac{3}{n^2} = 3\times\sum\frac{1}{n^2}$

$$= 3\times\frac{\pi^2}{6}$$

$$= \frac{\pi^2}{2}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{N=2}^{\infty}\frac{1}{N^2} = \sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N^2}-\frac{1}{1^2}$

$N = n+1$

$n=1:\quad N = 1+1 = 2$

$$\boxed{= \frac{\pi^2}{6}-1 = \frac{\pi^2-6}{6}}$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\times\frac{1}{n^2}$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\times\frac{\pi^2}{6}$$

$$= \frac{\pi^2}{24}$$

d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$

cv. abs.

$n=1$

c)

$n=0$
$2n+1=1$

$$= \frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}$$

$$= \frac{4\pi^2-\pi^2}{24} = \frac{3\pi^2}{24} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}$$

~~$k = 2n+1$~~

~~$n = \frac{k-1}{2}$~~

$k = 2n+1$

$\Leftrightarrow k$ impair

Calcul possible parce que $u_n > 0$

(cv. = cv. abs.)

exo 3

$\sum \frac{1}{n}$ dv, $\sum q^n$ cv, $|q|<1$

$\sum \frac{1}{n^2}$ cv. (exo 2)

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

$0 < \frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$ et $\sum \frac{1}{2^n}$ cv.
(série géom $q = \frac{1}{2} < 1$)

maj. cv.

$\Rightarrow \sum \frac{1}{n2^n}$ cv.

---

exo 4 b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$

$n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$
$(0! = 1)$

$u_n = \frac{(-1)^n}{n!}$

d'Alembert : $\displaystyle\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ converge.

exo 5 b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

On ne peut rien conclure pour la série !

En fait : $u_n > 1 \Rightarrow u_n \not\to 0 \Rightarrow \sum u_n$ diverge exo 6 a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}$

u_n de critère de Leibniz est $u_n = \frac{1}{2^n}$

- $u_n \geq 0$ ✓
- u_n décroissante ✓ ($(\frac{1}{2})^n \downarrow$)
- $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$ ✓

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ cv. (en fait : série géom. avec $q = -\frac{1}{2}$)

---

exo 3

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Si on admet $\sum \frac{1}{n^2}$ cv. (exo 2)

alors : $0 < \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$ ✓ parce que $n(n+1) > n \cdot n$ ✓

maj. cv.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ cv.

Autre approche : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$S_M = \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{M} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n+1}$

$\boxed{k = n+1}$

$n=1 : \; k = 1+1 = 2$

$n = M : \; k = M+1$

$= \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{M+1} \frac{1}{k}$

$$= \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{M+1} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{M+1} = 1 - \frac{1}{M+1}$$

$$\lim_{M\to\infty} S_M = \lim_{M\to\infty} \left(1 - \frac{1}{M+1}\right) = 1$$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

$$u_n = \frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} \quad (\text{si } n \geq 3)$$

minorant divergent
(série harmonique)

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \text{ dv.}}$$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ | $u_n = \dfrac{\ln n}{n^3} < \dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2}$

maj. cv.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$$