TD 9 decembre

24 b) $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x} + x^2}{n + x^2}$, $f(x) = e^{-x}$ limite simple

sur $[a,b]$, $a<b$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{\cancel{ne^{-x}} + x^2 - e^{-x}(\cancel{n} + x^2)}{n + x^2} \right|$$

$$= \frac{|x^2(1-e^{-x})|}{n+x^2} \leq \frac{M}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

suite numérique (pas de x)

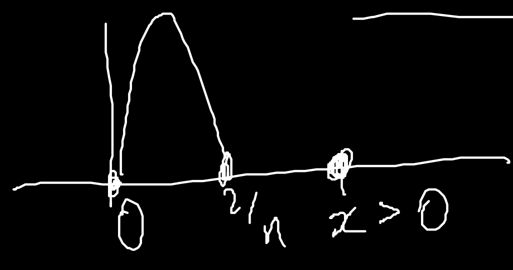
$x^2|1-e^{-x}|$ est une fonction continue donc elle possède un maximum M sur $[a,b]$

Conclusion : $f_n \to f$ uniformement sur $[a,b]$

25 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} -n^3x^2 + 2n^2x & \text{si } x \in [0, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\boxed{\text{Si } x = 0}$: $f_n(x) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

$\boxed{\text{Si } x > 0}$: $\exists N$ tq $\frac{2}{n} < x$ si $n \geq N$



À partir de N, $f_n(x) = 0$, $n \geq N$

$\lim f_n(x) = 0$

Conclusion : $\boxed{f(x)=0}$ est limite simple

b) $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{2/n}(-n^3x^2+2n^2x)\,dx + \underbrace{\int_{2/n}^1 0\,dx}_{=0}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[-n^3\frac{x^3}{3}+2n^2\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=2/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(-n^3\frac{8}{n^3}\cdot\frac{1}{3}+2n^2\frac{4}{n^2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{8}{3}+4\right) = \frac{4}{3}$$

---

c) $$\int_0^1 \underbrace{\boxed{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}}_{f(x)}\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0 \neq \frac{4}{3}$$

f_n continue et $\underbrace{\int\lim}_{=0} \neq \underbrace{\lim\int}_{4/3}$, donc pas de cv. unif !

---

26 (g_n) sur $[-1,1]$, $g_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$

a) $$\|g_n-0\|_\infty = \left\|\frac{x}{1+n^2x^2}\right\|_\infty$$

$$\left(\frac{x}{1+n^2x^2}\right)' = \frac{(1+n^2x^2)\cdot 1 - x\cdot 2xn^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

valeurs critiques : $1-n^2x^2=0$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{n^2} \Leftrightarrow \boxed{x=\pm\frac{1}{n}}$$

x	-1		$-\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$		1
$f_n(x)$	$\frac{-1}{n^2+1}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2n}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2n}$	$\searrow$	$\frac{1}{n^2+1}$

$(n^2+1\geq 2n)$

$(n-1)^2\geq 0$

$$\|g_n - 0\|_\infty = \frac{1}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{, donc } g_n \to 0 \text{ unif.}$$

b) $$g_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n'(x) \underset{x\neq 0}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2x^2}{n^4x^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n^2x^2} = 0$$

si $x \neq 0$

Si $x=0$: $g_n'(0) = 1 \to 1$

limite simple : $g_n' \to h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

g_n' continue, h n'est pas continue

$\Rightarrow$ g_n' ne converge pas uniformement

On ne peut pas appliquer le théorème !

c) $$f_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}$$

$$f_n'(x) = \frac{1}{\cancel{2n^2}} \cdot \frac{1}{1+n^2x^2} \cdot \cancel{2n^2}x = \frac{x}{1+n^2x^2} = g_n(x)$$

On sait deja que $g_n \to 0$ uniformement (a)

$f_n(0) = 0 \to 0$

Par le thme sur les derivées de suites de fcts,

on sait que f_n cv. uniformement et

$f = \lim f_n$ a la propriété que $f' = g = 0$

Conclusion : f est une constante et $f(0) = 0$
alors $f(x) = 0$, $x \in [-1,1]$

Séries des fonctions

(28) a) $f_n(x) = \dfrac{1}{n + x^n}$ sur $[1,2]$

$x^n \nearrow$ sur $[1,2]$
donc $n + x^n \nearrow$
donc $\dfrac{1}{n+x^n} \searrow$

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n + 1^n} = \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$ série harmonique, diverge

pas de cv. normale

b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$ sur $\mathbb{R}$

$$\left\| \frac{\sin nx}{n} \right\|_\infty = \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} |\sin nx| \leq 1 \\ \text{et } |\sin n\tfrac{\pi}{2n}| = 1 \end{array}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$ diverge

pas de cv. normale

c) $$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2}$$ sur $\mathbb{R}$

	$-\infty$		0		∞
nx^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$-nx^2$		$\nearrow$	0	$\searrow$	
e^{-nx^2}		$\nearrow$	1	$\searrow$	

$$\|e^{-nx^2}\|_\infty = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 \quad \text{diverge}$$

Conclusion: pas de cv. normale

29 a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{xn^2}$ sur $]0,\infty[$ | cv. simple ✓ $\frac{1}{x} \cdot \sum \frac{1}{n^2}$

$\boxed{x_n = \frac{1}{n^2}}$ $\quad f_n(x_n) = 1 \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$ normale

Conclusion: pas de cv. ni uniforme

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n/x}$ sur $]0,\infty[$

$x_n = -n$, mais $-n \notin]0,\infty[$

$x_n = n \Rightarrow 2^{-n/x_n} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$

Conclusion: ni cv. normale, ni uniforme

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ sur $[0,1[$

$x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \Rightarrow f_n(x_n) = n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1 \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$

$0 \leq \frac{1}{n^2} < 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \in [0,1[$

Conclusion: ni cv. normale, ni uniforme

d) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ sur $]0,\infty[$ (cv. simple : série géom.)

$x_n = \frac{1}{n} \in]0,\infty[$ ✓, $f_n(x_n) = e^{-1} = \frac{1}{e} \overset{n\to\infty}{\not\to} 0$

Conclusion : ni cv. normale, ni uniforme

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x^2}{n^4+x^2}$ sur $[0,\infty[$

$\boxed{x_n = n^2}$ $f_n(x_n) = \frac{n+n^4}{n^4+n^4} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} \neq 0$

(Alternative : $\frac{n+x^2}{n^4+x^2} = 1 \Leftrightarrow n+\cancel{x^2} = n^4 + \cancel{x^2}$?!

$\frac{n+x^2}{n^4+x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(n+x^2) = n^4+x^2$

$\Leftrightarrow x^2 = n^4 - 2n \geq 0$ si $n \geq 2$

donc $\boxed{x_n = \sqrt{n^4-2n}}$ $f_n(x_n) = \frac{1}{2} \overset{n\to\infty}{\not\to} 0$)

Conclusion : ni normale, ni uniforme

30 a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$ sur $]0,\infty[$

$x_n = \frac{1}{n}$: $|f_n(x_n)| = \left| \frac{(-1)^n e^{-1}}{n+1} \right| = \frac{1}{e(n+1)}$

$\sum \frac{1}{e(n+1)} = \frac{1}{e} \sum \frac{1}{n+1}$ série harmonique qui diverge

Conclusion : pas de cv. normale

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x^3}{n^4+x^4}$ sur $[0,\infty[$

$\boxed{x_n = n}$: $|f_n(x_n)| = \left|\frac{n+n^3}{2n^4}\right| = \frac{n^3+n}{2n^4} \sim \frac{1}{2n}$

$\sum \frac{1}{2n}$ série harmonique, diverge

Conclusion: pas de cv. normale

---

(31) a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x}$ sur $[1,2]$

fonction décroissante $\Rightarrow \left\|\frac{1}{n^2 x}\right\|_\infty = \frac{1}{n^2 \cdot 1} = \frac{1}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ cv. (série de Riemann à l'exposant $2 > 1$)

Conclusion: cv. normale

b) $\sum \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$ sur $[1,\infty[$

$\left|\frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}\right| = \frac{e^{-nx}}{n+1}$ fonction decroissante

Donc, $\left\|\frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}\right\|_\infty = \frac{e^{-n\cdot 1}}{n+1} = \frac{1}{(n+1)e^n}$

$\sum \frac{1}{(n+1)e^n}$ Critère de Cauchy:

$\sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)e^n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e} < 1$

$\sum \|f_n\|_\infty$ converge, alors on a cv. normale.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x^2}{n^4+x^2}$ sur $[0,1]$

$$\left(\frac{n+x^2}{n^4+x^2}\right)' = \frac{(n^4+\cancel{x^2})\cdot 2x-(n+\cancel{x^2})\cdot 2x}{(n^4+x^2)^2} = \frac{2nx(n^3-1)}{(n^4+x^2)^2}$$

Valeur critique: $x=0$

x	0		1
$f_n(x)$	$\frac{1}{n^3}$	$\nearrow$	$\frac{n+1}{n^4+1}$

$$\left(\begin{array}{l} \frac{1}{n^3} < \frac{n+1}{n^4+1} \\ \Leftrightarrow n^4+1 < n^4+n \\ \Leftrightarrow 1 < n \ \checkmark \end{array}\right)$$

$$\|f_n\|_\infty = \frac{n+1}{n^4+1} \sim \frac{1}{n^3}$$

$\sum \frac{1}{n^3}$ converge (série de Riemann) (à l'exposant $3>1$)

Conclusion: convergence normale

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x}{n^4+x^2}$ pour $x\in[0,\infty[$

$$\left(\frac{n+x}{n^4+x^2}\right)' = \frac{(n^4+x^2)\cdot 1-(n+x)\cdot 2x}{(n^4+x^2)^2}$$

$$= \frac{n^4 - 2nx - x^2}{(n^4 + x^2)^2}$$

Valeurs critiques : $\boxed{x^2 + 2nx - n^4 = 0}$

$$x = \frac{-2n \pm \sqrt{4n^2 + 4n^4}}{2} = -n \pm \sqrt{n^2+n^4}$$

$-n - \sqrt{n^2+n^4} \notin [0, \infty[$, donc $-n + \sqrt{n^2+n^4}$ seule valeur critique

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & & -n+\sqrt{n^2+n^4} & & \infty \\ \hline f_n(x) & \frac{1}{n^3} & \nearrow & a_n & \searrow & 0 \end{array}$$

n grand $\qquad a_n \overset{\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$

$$\frac{n+x}{n^4+x^2} = \frac{\cancel{n-n} + \sqrt{n^2+n^4}}{n^4 + n^2 + n^2 + n^4 - 2n\sqrt{n^2+n^4}}$$

$$= \frac{n\sqrt{1+n^2}}{2n^4 + 2n^2 - 2n^2\sqrt{1+n^2}} \overset{\infty}{\sim} \frac{n^2}{2n^4} \overset{\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

$\|f_n\|_\infty \sim \frac{1}{2n^2}$ et $\sum \frac{1}{2n^2}$ converge

(série de Riemann à l'exposant $2 > 1$)

Conclusion : on a convergence normale

(32) a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x}{n^4+x^2}$ sur $[0,\infty[$

$$\frac{n+x}{n^4+x^2} \leq \begin{cases} \frac{n+x}{n^4} \leq \frac{n+n^2}{n^4} & \text{si } x \leq n^2 \\ \frac{n+x}{x^2} = \frac{n}{x^2} + \frac{1}{x} \leq \underbrace{\frac{n}{n^4} + \frac{1}{n^2}}_{= \frac{n+n^2}{n^4}} & \text{si } x > n^2 \end{cases}$$

$n^4 = x^2 \Leftrightarrow x = n^2$

$$\Rightarrow \quad \left| \frac{n+x}{n^4+x^2} \right| \leq \frac{n+n^2}{n^4}, \quad \forall x \in [0,\infty[$$

$$\Rightarrow \quad \left\| \frac{n+x}{n^4+x^2} \right\|_\infty \leq \frac{1+n}{n^3} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann)

Donc, par majoration, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge, donc on a convergence normale.

---

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ sur $[0,a]$, $a<1$.

$$\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \left\| \frac{x^n}{n^2} \right\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$$

et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Rièmann à l'exposant $2>1$)

Conclusion : convergence normale.

---

33) a) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, cv. de $\sum f_n$

sur $[0,\infty[$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<1 \\ 1/2 & \text{si } x=1 \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

Comme $\lim f_n(x) \neq 0$ pour $x \geq 1$,
la série ne converge pas pour $x \geq 1$
donc ne converge pas sur $[0,\infty[$

$\boxed{\text{sur } [0,\infty[\text{ : ni cv. simple, ni absolue, ni cv. normale ni uniforme}}$

sur $[0,1[$: $\left|\dfrac{x^n}{1+x^n}\right| < x^n$ et $\sum x^n$ cv. si $x<1$
série géom.

$f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$

$\boxed{x_n = \sqrt[n]{\tfrac{1}{2}}}$ $\quad f_n(x_n) = \dfrac{1/2}{1+1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \hspace{-1.5em}/\hspace{1.2em} 0$ $\quad$ cv. abs = cv. simple + positive

✓ $\in [0,1[$ ✓ , ni cv. normale, ni unif.

$\boxed{x_n^n = \tfrac{1}{2}}$

$\boxed{\text{sur } [0,1[\text{ : cv. simple et abs, pas normale ni uniforme}}$

sur $[0,a]$, $a<1$

$f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n} = 1 - \dfrac{1}{1+x^n}$ $\quad \left| \begin{array}{l} x^n \nearrow \\ \Rightarrow 1+x^n \nearrow \\ \Rightarrow \dfrac{1}{1+x^n} \searrow \end{array} \right.$

f_n est croissante $\Rightarrow -\dfrac{1}{1+x^n} \nearrow$

$\Rightarrow 1 - \dfrac{1}{1+x^n} \nearrow$

$$\|f_n\|_\infty = \frac{a^n}{1+a^n}$$

$$\sum \|f_n\|_\infty = \sum \frac{a^n}{1+a_n} \leq \sum a^n \text{ cv.}$$

série géom $a<1$

$\boxed{\text{sur } [0,a] : \text{ cv. normale, uniforme, absolue et simple}}$

b) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^3+x^3}$ sur $[0,\infty[$

x fixé : $\dfrac{x^2}{n^3+x^3} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{n^3}$

et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^3}$ cv. (série de Riemann à l'exposant $3>1$)

cv. abs ✓ (cv. simple et positivité)

$x_n = n$: $f_n(x_n) = \dfrac{n^2}{2n^3} = \dfrac{1}{2n}$

$\sum \dfrac{1}{2n}$ série harmonique, diverge

donc, pas de cv. normale

cv. uniforme ? $\displaystyle\left\| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^2}{k^3+x^3} \right\|_\infty \geq \left\| \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{x^2}{k^3+x^3} \right\|_\infty$

$$\sum_{k=0}^{\infty} - \sum_{k=0}^{n-1} \geq \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{n^2}{(2n)^3+n^3} = n \cdot \frac{1}{9n} = \frac{1}{9}$$

$$x = n \in [0,\infty[$$

donc $\|\sum_{k<n}^{\infty} f_k(x)\|_\infty \not\to 0$, donc pas de cv. unif.

$[0,a]$, $a>0$: $\|f_n(x)\|_\infty = \left\|\frac{x^2}{n^3+x^3}\right\|_\infty \leq \left\|\frac{x^2}{n^3}\right\|_\infty = \frac{a^2}{n^3}$

$\sum \frac{a^2}{n^3}$ converge (série de Riemann à l'exposant $3>1$)

Conclusion : cv. normale, donc uniforme, absolue et simple

c) $f_n(x) = \frac{x}{n^3+x^{3/2}}$

$f_n(y^2) = \frac{y^2}{n^3+y^3}$, même fonction que dans b!

---

34 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$

a) $\left|\frac{\sin(nx)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$; $\sum \frac{1}{n^3}$ cv.

est une série de Riemann ($3>1$) exposant

$\Rightarrow \sum \|f_n\|_\infty$

est majorée par une série convergente

Donc, cv. normale, uniforme, absolue et simple

b) $\dfrac{\sin(nx)}{n^3}$ est une fonction continue (parce que sin est continue)

et la cv. est normale, donc uniforme

Par le thm de continuité de séries de fcts, on conclut que $f = \sum f_n$ est continue.

c) $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\,dx = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{cv. unif} \\ f_n \text{ continue}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\pi f_n(x)\,dx$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}\,dx = \left[\frac{-\cos(nx)}{n^4}\right]_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= \frac{-\cos(n\pi)}{n^4} + \frac{1}{n^4}$$

$$= \underbrace{\frac{1-(-1)^n}{n^4}}_{a_n} = \begin{cases} 0 & n \text{ pair} \\ \dfrac{2}{n^4} & n \text{ impair} \end{cases}$$

$$\boxed{\cos(n\pi) = (-1)^n}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^4} \checkmark$$

d) Mq : $f'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$

$f_n'(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2} \checkmark$ et $\sum f_n$ converge

Il reste à vérifier la cv. uniforme de $\sum f_n'$

$\left\| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right\|_\infty = \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, exposant $2 > 1$)

Donc cv. normale, donc uniforme, on a donc bien $f'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$

---

36) $\varphi(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right)$, $x \in \mathbb{R}_+$, $x \neq 2, 3, 4, \ldots$

a) domaine de définition : déjà : $x \neq 2, 3, 4, \ldots$

$$\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{n+x-(n-x)}{n^2-x^2} = \frac{2x}{n^2-x^2} \sim \frac{2x}{n^2}$$

(série de Riemann qui cv, exposant $2 > 1$)

$$\boxed{\mathbb{R}_+ \setminus \{2,3,4,\dots\}}$$

b) $\int_0^1 \varphi(x)\,dx$, $\varphi(x)$ est définie sur $[0,1]$

On veut convergence uniforme! (sur $[0,1]$)

$$\varphi(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \varphi_n(x) \quad , \quad \varphi_n(x) = \frac{2x}{n^2-x^2}$$

$$\left\| \frac{2x}{n^2-x^2} \right\|_\infty = \ ?$$

$$\left(\frac{2x}{(n^2-x^2)} \right)' = \frac{(n^2-x^2)\cdot 2 - 2x\cdot(-2x)}{(n^2-x^2)^2}$$

$$= \frac{2n^2 - 2x^2 + 4x^2}{(n^2-x^2)^2} = \frac{2(n^2+x^2)}{(n^2-x^2)^2} > 0$$

Donc, maximum pour $x = 1$

$$\left\| \frac{2x}{n^2-x^2} \right\|_\infty = \frac{2}{n^2-1}$$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$ converge ? OUI, $\frac{2}{n^2-1} \sim \frac{2}{n^2}$

(série de Riemann cv., expos. $2 > 1$)

cv. normale, donc uniforme

Comme φ_n sont continue sur $[0,1]$ et $\varphi_n \to \varphi$ unif. sur $[0,1]$, φ est continue, $\int_0^1 \varphi(x)\,dx$ existe et

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_0^1 \sum_{n=2}^{\infty} \varphi_n(x)\,dx$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = (*)$$

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{2x}{n^2-x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\,dx$$

$$= \Big[-\ln(n-x) - \ln(n+x)\Big]_{x=0}^{x=1}$$

$$= -\ln(n-1) - \ln(n+1) + \ln n + \ln n$$

$$= 2\ln n - \ln(n-1) - \ln(n+1)$$

$$(*) = \sum_{n=2}^{\infty} \big(2\ln n - \ln(n-1) - \ln(n+1)\big)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \big(2\ln n - \ln(n-1) - \ln(n+1)\big)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(2\sum_{n=2}^{N} \ln n - \sum_{n=2}^{N} \ln(n-1) - \sum_{n=2}^{N} \ln(n+1)\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(2\sum_{n=2}^{N} \ln n - \sum_{n=1}^{N-1} \ln(n) - \sum_{n=3}^{N+1} \ln(n)\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \Big(2\cdot \ln 2 + 2 \ln N + \cancel{2\sum_{n=3}^{N-1} \ln n}$$

$$- \cancel{\ln 1} - \ln 2 - \cancel{\sum_{n=3}^{N-1} \ln n}$$

$$- \ln N - \ln(N+1) - \cancel{\sum_{n=3}^{N-1} \ln n} \Big)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \big(\ln 2 + \ln N - \ln(N+1) \big)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \Big(\ln 2 + \ln \underbrace{\frac{N}{N+1}}_{\to 1} \Big) = \ln 2 + \underbrace{\ln 1}_{0}$$

$$= \ln 2$$

$$\boxed{I = \int_0^1 \varphi(x)\,dx = \ln 2}$$