TD Analyse pour l'économie

Theresia Eisenkölbl, Pierre Lavaurs
Université Lyon 1
Semestre automne 2020

1 Séries numériques

Exercice 1. Vrai ou faux ?

a. La série $\sum \frac{1}{n}$ converge.

b. La série $\sum 2^n$ converge.

c. Si une série $\sum u_n$ converge, alors $u_n \to 0$.

d. Si une série $\sum (-1)^n u_n$ converge, alors $u_n \to 0$.

e. Si $u_n \to 0$, alors $\sum u_n$ converge.

f. Si $u_n \to 0$ et $u_n > 0$, alors $\sum (-1)^n u_n$ converge.

g. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum (u_n + v_n)$ converge.

h. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

Exercice 2. On admet que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

a. Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$.

b. Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$.

c. Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$.

d. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 3. En utilisant des minorants divergents ou des majorants convergents, déterminer si les séries suivantes convergent ou non.

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.

d. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$.

Exercice 4. Appliquer le critère de d'Alembert (quotient) aux séries suivantes et décider si on peut conclure si elles convergent ou non.

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$.

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n!}$.

d. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 5. Appliquer le critère de Cauchy (racine) aux séries suivantes et décider si on peut conclure si elles convergent ou non.

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n^2}\right)^n$.

d. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 6. Si possible, appliquer le critère de Leibniz (alternée) aux séries suivantes et décider si on peut conclure si elles convergent ou non.

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$.

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

c. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$.

d. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$.

Exercice 7. Appliquer la comparaison série/intégrale aux séries suivantes et décider si on peut conclure si elles convergent ou non.

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

b. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$.

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$.

d. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Exercice 8. Décider si les séries suivantes convergent/convergent absolument ou divergent/divergent vers l'infini.

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

b. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$.

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$.

d. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+2n}$

e. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

f. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln \ln n}$.

g. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!}$.

h. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2}\right)^n$.

i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

j. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

k. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)$

l. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

2 Intégrales généralisées

Exercice 9. Déterminer si les intégrales impropres suivantes convergent ou pas, et calculer la valeur dans le cas de convergence :

a. $\displaystyle\int_0^\infty \sin t\, dt$

b. $\displaystyle\int_0^\infty \exp(-x)\, dx$

c. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \exp(-|x|)\, dx$

d. $\displaystyle\int_0^\infty \exp(-t)\cos t\, dt$

e. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$

f. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$

g. $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, dx$

h. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

Exercice 10. Déterminer si les intégrales impropres suivantes convergent ou pas :

a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$ **b.** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}$ **c.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{1+x^2}\, dx$

Exercice 11. En utilisant changement de variables ou intégration par parties, évaluer les intégrales généralisées suivantes :

a. $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx$ **b.** $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-x^2}\, dx$ **c.** $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx$

3 Révision équivalences et applications aux séries et intégrales

Exercice 12. Trouver un équivalent simple (typiquement un terme de type x^k, e^{-x}, $\ln x$ ou leurs produits si la variable est x). S'il y a une seule variable, on suppose qu'elle est la variable de la fonction sans le préciser.

a. $x^3 + x^5$ en $+\infty$

b. $x^3 + x^5$ en 0

c. $3^n + 5^n + \ln n + n^2$ en $+\infty$

d. $(x^3 + x^5)(x^2 + x^7)$ en 0

e. $(x^3 + x^5)\sin x$ en 0

f. $(x^3 + x^5)\cos x$ en 0

g. $\sqrt{x^3 + x^5}$ en $+\infty$

h. $\dfrac{n^5 + 1}{n^4 + n^3 + 2}$ en $+\infty$

Exercice 13. Trouver un équivalent simple.

a. $\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ en $+\infty$

b. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ en $+\infty$

c. $(\sqrt{n+2})\sin\left(\pi + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ en $+\infty$

d. $e^{n^2+1+\frac{1}{n}}$ en $+\infty$

Exercice 14. Trouver un équivalent simple.

a. $\cos x - 1$ en 0

b. $e^x - 1 - x$ en 0

c. $\cos x - \sqrt{1-x^2}$ en 0

d. $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ en $+\infty$

e. $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) - \dfrac{1}{n}$ en $+\infty$

f. $\ln(1+n)$ en $+\infty$

g. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ en $+\infty$

Exercice 15. En utilisant des équivalents, décider si les intégrales généralisées suivantes convergent.

a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$

b. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$

c. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$

d. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1+x^3}{2+x^5}\,dx$

e. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-\cos x}\,dx$

f. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^{x^2}-1}\,dx$

Exercice 16. En utilisant des équivalents, décider si les séries suivantes convergent.

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{n^3+2}{n^4+5}$

b. $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{2^n+3}{5^n+1}$

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n+\ln n}{n^4+5}$

d. $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Exercice 17 (La fonction gamma)**.**

a. Soit $a > 0$ fixé. Prouver la convergence de l'intégrale généralisée

$$\Gamma(a) := \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx.$$

b. Montrer que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ pour tout $a > 0$.

c. Calculer $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

4 Suites de fonctions

Exercice 18. Calculer la limite simple des suites de fonctions suivantes et décider si la convergence est uniforme.

a. $f_n : (0,1] \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = \dfrac{1}{nx}$

b. $f_n : [1,2] \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = \dfrac{1}{nx}$

c. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2x^2+1}$

d. $f_n : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2x^2+1}$

e. $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = \exp(-nx)$

f. $f_n : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = \exp(-nx)$

g. $f_n : [1,2] \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = \exp(-nx)$

Exercice 19. Convergence simple et uniforme
On étudie les suites de fonctions réelles définies par $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \dfrac{x}{x+n} + \arctan(x)$ et $g_n : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \dfrac{nx}{1+nx}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Les suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent-elles simplement sur $[0,1]$?

b. Convergent-elles uniformément sur $[0,1]$? Sur $]0,1]$? Soit $a \in]0,1[$. Convergent-elles uniformément sur $[a,1]$?

c. Convergent-elles simplement et uniformément sur $[1,+\infty[$?

Exercice 20. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \sin(nx^2)\exp(-nx^2).$$

a. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[-1,1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.

b. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.

c. Montrer que pour tout $a > 0$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,1]$.

Exercice 21. On considère la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{1+x^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$, puis sur $[0,1[$, puis sur $[0,a]$ avec $0 < a < 1$.

Exercice 22. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0,1[$ par

$$f_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right).$$

a. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers une fonction f que l'on précisera.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer (si elle existe) la limite $\lim_{x \to 1^-} f_n(x)$.

c. Que peut-on en conclure sur la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 23. Convergence et intégrales
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}$.

a. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions sur $[0,1]$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$ et $\lim_{n\to+\infty} I_n$. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.

c. Donner une démonstration directe de ce que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.

Exercice 24. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x^2}.$$

a. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.

b. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est uniformément convergente sur le segment $[a,b]$.

c. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $[a,+\infty[$.

d. Calculer la limite lorsque $n \to +\infty$ de $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.

Exercice 25. Soit $(f_n)_{n\geq 2}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} -n^3x^2 + 2n^2x & \text{si } x \in \left[0, \frac{2}{n}\right] ; \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{2}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

a. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.

b. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x.$$

c. En déduire que $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 26. Convergence uniforme et dérivées
Soit $(g_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $[-1,1]$ par $g_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^2x^2}$.

a. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction nulle.

b. Étudier la convergence de $(g'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[-1,1]$.

c. On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[-1,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.

Exercice 27. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{n}\arctan\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

a. Étudier les modes de convergence de la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b. En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$.

c. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

5 Séries de fonctions

Exercice 28. Montrer que les séries de fonctions suivantes ne convergent pas normalement sur l'intervalle I indiqué en montrant que $\sum ||f_n||_\infty$ diverge.

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^n}$ sur $I = [1,2]$,

b. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ sur $I = \mathbb{R}$,

c. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 29. Montrer que les séries de fonctions suivantes ne convergent pas normalement ni uniformément sur l'intervalle indiqué I en trouvant $(x_n)_n$ tel que $f_n(x_n)$ ne tend pas vers 0.

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{xn^2}$ sur $I =]0,\infty[$,

b. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n/x}$ sur $I =]0,\infty[$,

c. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ sur $I = [0,1[$,

d. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ sur $I =]0,\infty[$,

e. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x^2}{n^4+x^2}$ sur $I = [0,\infty[$.

(Indication: Si le dénominateur est la somme de deux termes positifs, l'argument x_n est souvent la valeur où les deux termes sont égaux.)

Exercice 30. Montrer que les séries de fonctions suivantes ne convergent pas normalement sur l'intervalle I indiqué en trouvant $(x_n)_n$ tel que $\sum |f_n(x_n)|$ diverge.

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$ sur $I =]0,\infty[$,

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x^3}{n^4+x^4}$ sur $I = [0,\infty[$.

Exercice 31. Montrer que les séries de fonctions suivantes convergent normalement sur l'intervalle I indiqué en montrant que $\sum ||f_n||_\infty$ converge.

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x}$ sur $I = [1,2]$,

b. $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$ sur $I = [1,\infty[$,

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x^2}{n^4+x^2}$ sur $I = [0,1]$.

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+x}{n^4+x^2}$ pour $x \in [0,\infty[$.

Exercice 32. Montrer que les séries de fonctions suivantes convergent normalement sur l'intervalle I indiqué, en trouvant $(a_n)_n$ tel que $|f_n(x)| \leq a_n$ $\forall x$ et $\sum a_n$ converge.

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x}{n^4+x^2}$ sur $I = [0,\infty[$,

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ sur $I = [0,a]$, $a < 1$.

(Indication: Si le dénominateur est la somme de deux termes positifs, on trouve souvent deux majorations pour deux parties de l'intervalle en supprimant un des deux termes en faisant la différence si x est plus grand ou plus pétit que la valeur où les deux termes sont égaux.)

Exercice 33. (Convergence simple, normale et uniforme)

Etudier la convergence simple, la convergence normale puis la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ dans les cas suivants:

a. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, sur $[0, +\infty[$, puis sur $[0, 1[$, puis sur $[0, a]$ avec $a \in]0, 1[$.

b. $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^3+x^3}$, sur $[0, +\infty[$ puis sur $[0, a]$ avec $a > 0$.

c. $f_n(x) = \dfrac{x}{n^3+x^{3/2}}$ sur $[0, +\infty[$ puis sur $[0, a]$ avec $a > 0$.

Exercice 34. (Série de fonction, intégrale, et dérivée)

On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$.

a. Montrer que cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b. Montrer que sa somme $f = \displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ est une fonction continue.

c. Montrer que $\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx = 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)^4}$.

d. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 35. (Classe $\mathcal{C}^\infty$)

On pose, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que f est bien définie et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 36. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose (lorsque cela a un sens)

$$\varphi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) .$$

a. Déterminer le domaine de définition de la fonction φ.

b. Justifier l'existence de l'intégrale suivante et la calculer explicitement :

$$I = \int_0^1 \varphi(x)\ \mathrm{dx}.$$

Exercice 37. Pour x réel, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}\ .$$

a. Déterminer le domaine de définition de f, noté D_f.

b. Étudier la continuité de f sur D_f.

c. Montrer que la fonction f est strictement décroissante.

d. Étudier la limite de f en $+\infty$.

Exercice 38. On considère la série de fonctions $\sum_n f_n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \frac{(-1)^n e^{-nt}}{n+1}.$$

a. (a) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $E_s = [0, +\infty[$.

(b) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur $E_a =]0, +\infty[$.

(c) Montrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur E_s.

(d) La série converge-t-elle normalement sur E_s ? Et sur E_a ? Justifier.

b. Soit S la fonction somme de la série de fonctions $\sum f_n$. Montrer que lorsque t tend vers $+\infty$, $S(t)$ tend vers 1.

6 Séries entières

Exercice 39. Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes en utilisant Cauchy ou d'Alembert :

a. $\sum z^n/n!$

b. $\sum(-1)^n(n+3)!z^n$

c. $\sum n^n z^n$

d. $\sum \dfrac{2^n}{n!}z^n$

e. $\sum nz^n$

f. $\sum(\ln n)z^n$

g. $\sum \dfrac{\ln n}{\ln(n+1)}z^n$

Exercice 40. Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes par comparaison à une série sans coefficients nuls :

a. $\sum z^{n!}$

b. $\sum n^2 z^{(n^2)}$

Exercice 41. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes en remplacant les coefficients par des équivalents plus simples :

a. $\sum \dfrac{n^2+1}{n^4+3}z^n$

b. $\sum \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$

Exercice 42. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes et les évaluer en utilisant les séries entières connues vues dans le cours :

a. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{3n}$

b. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$

c. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{4n}/n!$

d. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n/n!$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$

f. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n/(2n)!$

Exercice 43. Déterminer les rayons de convergence et développer en série entière autour de 0 :

a. $\dfrac{1}{1-2z}$

b. $\dfrac{1}{z-5}$

c. $\dfrac{1}{1+9z^2}$

d. $\dfrac{1}{(1+z)^2}$

e. $\ln(2-z)$

f. $\exp(2z)$

g. $\exp(z^2)$

Exercice 44. Montrer que $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}/(2n)!$. En déduire la série entière de $\sin z$.