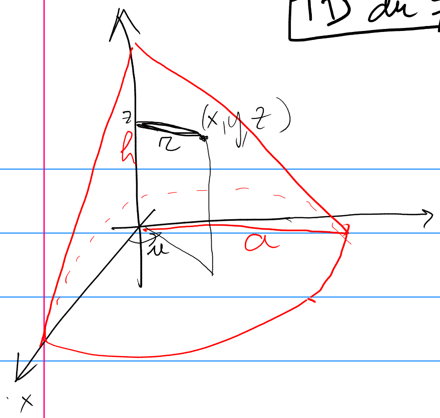
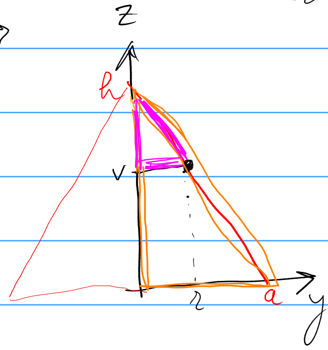
54

TD du 7 avril 2021



Paramétrer la surface latérale Σ du cône de rayon a et hauteur h.
Calculer ensuite l'aire de la surface Σ



$x = r\cos u = \frac{a(h-v)}{h}\cos u$

$y = r\sin u = \frac{a(h-v)}{h}\sin u$

$z = v \dots$

$\varphi(u,v) = (\,\_\_, \_\_, \_\_\,)$

r à exprimer en fonction de a, h, v. $\quad r = \dots$

$\frac{v}{h} = \frac{r}{a}$ $\quad \frac{a}{r} = \frac{h}{h-v}$ $\quad r = \frac{a(h-v)}{h}$

$$\varphi(u,v) = \left(\frac{a(h-v)}{h}\cos u, \frac{a(h-v)}{h}\sin u, v\right) \qquad u \in [0,2\pi],\ v \in [0,h]$$

$$\text{Aire}(\Sigma) = \iint_{[0,2\pi]\times[0,h]} \|(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u,v)\|\, du\, dv$$

$$\varphi_u(u,v) = \left(-\frac{a(h-v)}{h}\sin u, \frac{a(h-v)}{h}\cos u, 0\right) \qquad \varphi_v(u,v) = \left(-\frac{a}{h}\cos u, -\frac{a}{h}\sin u, 1\right)$$

$$(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u,v) = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{a(h-v)}{h}\sin u & \frac{a(h-v)}{h}\cos u & 0 \\ -\frac{a}{h}\cos u & -\frac{a}{h}\sin u & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \vec{i}\,\frac{a(h-v)}{h}\cos u + \vec{j}\,\frac{a(h-v)}{h}\sin u + \vec{k}\,\frac{a^2(h-v)}{h^2}$$

$$\|\varphi_u \wedge \varphi_v(u,v)\| = \sqrt{\frac{a^2(h-v)^2}{h^2} + \frac{a^4}{h^4}(h-v)^2} = \frac{(h-v)a}{h}\sqrt{1+\frac{a^2}{h^2}} = \frac{(h-v)a\sqrt{h^2+a^2}}{h^2}$$

$$\text{Aire}(\Sigma) = \iint_{[0,2\pi]\times[0,h]} \frac{(h-v)a\sqrt{h^2+a^2}}{h^2}\, du\, dv = \frac{a\sqrt{h^2+a^2}}{h^2}\left(\int_0^{2\pi} 1\, du\right)\underbrace{\left(\int_0^h (h-v)\, dv\right)}_{=\int_0^h v\, dv}$$

$$= \frac{2\pi a\sqrt{h^2+a^2}}{h^2}\cdot\frac{1}{2}h^2$$

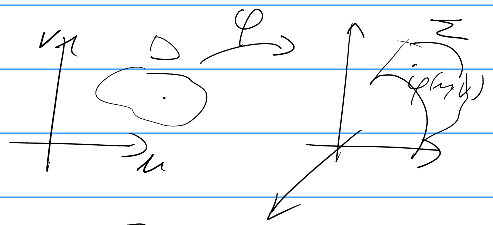
$$= \pi a\sqrt{h^2+a^2}.$$

(55) $\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \ z=x^3 \ , \ 0\le x\le 1 \ , \ 0\le y\le \pi\}$

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ où $f(x,y,z)=3x^3\sin y$ Calculer $\boxed{\int_\Sigma f\,d\sigma}$

Rappel. $$\int_\Sigma f\,d\sigma = \iint_D f(\varphi(u,v))\,\|(\varphi_u\wedge\varphi_v)(u,v)\|\,du\,dv$$

où $\varphi: D\to\mathbb{R}^3$ est la paramétrisation de Σ
$D\subset\mathbb{R}^2$



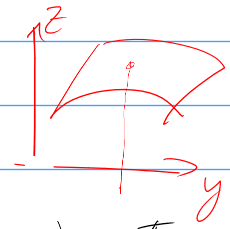
Pour paramétrer Σ on définit:

$\varphi(u,v)=(u\ ,\ v\ ,\ u^3)$, $\boxed{\begin{array}{l}0\le u\le 1\\ 0\le v\le \pi\end{array}}$

$$(\varphi_u\wedge\varphi_v)(u,v)=\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 3u^2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\vec{i}(-3u^2)-\vec{j}\cdot 0+\vec{k}\cdot 1$$

$\varphi_u(u,v)$ $\varphi_v(u,v)$

$\varphi(x,y)=(x,y,f(x,y))$
$=(x,y,x^3)$



$$\|\varphi_u\wedge\varphi_v(u,v)\|=\sqrt{9u^4+1}$$

$$\int_\Sigma f\,d\sigma=\iint_{[0,1]\times[0,\pi]} 3u^3\sin v\,(9u^4+1)^{1/2}\,du\,dv=\left(\int_0^1 3u^3(9u^4+1)^{1/2}\,du\right)\cdot\underbrace{\left(\int_0^\pi \sin v\,dv\right)}_{=2}$$

$$=2\left[\frac{1}{18}(9u^4+1)^{3/2}\right]_{u=0}^{u=1}=\frac{1}{9}\left(10^{3/2}-1\right)$$

$\frac{3}{2}(9u^4+1)^{1/2}\cdot 9\cdot 4u^3$

Rappel. si $f\equiv 1$ $\int_\Sigma 1\,d\sigma=\text{Aire}(\Sigma)$.

$ax+by+cz=0$

exercice juin 2020

Paramétrer et calculer l'aire de la surface $\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 2x+3y-z=0 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ \text{et } 0 \leq y \leq 2 \end{array} \right\}$

de quelle surface s'agit-il ?

Σ est une portion du plan π passant par l'origine et orthogonal au vecteur $\nu = (2,3,-1)$

en effet $(x,y,z) \in \pi \iff (x,y,z) \cdot (2,3,-1) = 0$

Soit $\varphi(u,v) = (u, v, 2u+3v)$, $\quad 0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2$

$$\text{Aire}(\Sigma) = \int_\Sigma 1 \, d\sigma = \iint_{[0,1]\times[0,2]} \|(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u,v)\| \, du\,dv$$

$$(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u,v) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \vec{i} \cdot (-2) - \vec{j} \cdot 3 + \vec{k} \cdot 1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\varphi_u(u,v)$ $\quad$ $\varphi_v(u,v)$

$$\|\varphi_u \wedge \varphi_v(u,v)\| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$$

$$\text{Aire}(\Sigma) = \iint_{[0,1]\times[0,2]} \sqrt{14} \, du\,dv = \sqrt{14} \cdot 2$$

$\boxed{\text{Mai 2018}}$ écrire l'éq du plan tangent à la surface Σ paramétrée par
$$\begin{cases} x = uv \\ y = 1+3u \\ z = v^3+2u \end{cases}$$
au point $P_0 = (1,4,3)$.

$$\varphi(u,v) = (uv,\ 1+3u,\ v^3+2u)$$

$$\varphi_u(u,v) = (v, 3, 2) \qquad \varphi_v(u,v) = (u, 0, 3v^2)$$

Vérifions que $P_0 \in \Sigma$. En effet on résoud $\begin{cases} uv = 1 & \Rightarrow v=1 \\ 1+3u = 4 & \Rightarrow u=1 \\ v^3+2u = 3 & \text{OK} \end{cases}$

$\boxed{P_0 = \varphi(1,1)}$

On prend $(u_0,v_0) = (1,1)$

$$\varphi_u(u_0,v_0) = \varphi_u(1,1) = (1,3,2) \qquad \varphi_v(1,1) = (1,0,3)$$

le plan cherché est le plan d'équation : $\boxed{0 = \det\begin{pmatrix} x-1 & y-4 & z-3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$

on trouve $9(x-1) - (y-4) + (z-3)\cdot(-3) = 0$

$$9x - y - 3z = 9-4-9 \qquad \boxed{9x - y - 3z = -4}$$

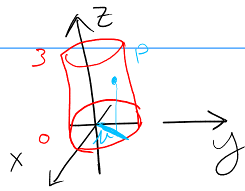
Rép. Σ surface de $\mathbb{R}^3$ et $P_0 = \varphi(u_0,v_0) \in \Sigma$
éq. du plan tangent à Σ en P_0 : $\boxed{0 = \det\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u_0,v_0) \end{pmatrix}}$

$P_0 = (x_0,y_0,z_0)$

$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$

55.2 $\quad \Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1,\ 0 \le z \le 3\}$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x+1$. Calculer $\boxed{\int_\Sigma f\, d\sigma = \iint_{[0,\pi]\times[0,3]} (\cos u + 1)\cdot 1\, du\, dv}$



$$\varphi(u,v) = (\cos u, \sin u, v) \qquad \begin{matrix} u \in [0,2\pi] \\ v \in [0,3] \end{matrix}$$

$$(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u,v) = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \vec{i}\cos u + \vec{j}\sin u + 0\vec{k}$$

$$\|(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u,v)\| = \sqrt{\cos^2 u + \sin^2 u} = 1$$

Donc : $\displaystyle\int_\Sigma f\,d\sigma = \iint_{[0,2\pi]\times[0,3]} (\cos u+1)\,du\,dv = \underbrace{\left(\int_0^{2\pi}\cos u\right)}_{=0}\left(\int_0^3 1\,dv\right) + 6\pi$

$= 6\pi$.

$\boxed{\text{exercice}}$ paramétrer la portion de sphère centrée en O de rayon R comprise entre $-\frac{R}{2} \leq z \leq \frac{R}{2}$. en utilisant les coordonnées sphériques.

---

(56) Mq l'égalité $\boxed{2e^{x+y}+y-x=0}$ $(*)$ définit implicitement y comme fonction de x : $y=\varphi(x)$ au voisinage de $(1,-1)$

Calculer $\varphi'(1)$ et $\varphi''(1)$.

Soit Γ la courbe définie implicitement par $(*)$

Mq $(1,-1)\in\Gamma$ $\quad 2\cdot e^{1-1}-1-1 = 2-2=0$ OK.

Soit $\boxed{F(x,y)=2e^{x+y}+y-x}$ $\quad (*) \Leftrightarrow \boxed{F(x,y)=0}$

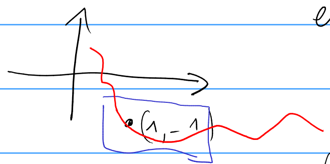
On applique le théo de F. implicites

1) On a F est de classe C^2

2) $F_y(1,-1)\neq 0$, en effet $\boxed{F_y(x,y)=2e^{x+y}+1}$ $\quad F_y(1,-1)=2+1=3$

Par le théo des f. implicites $\exists\, I\times J$ où I intervalle centré en 1, J intervalle centré en -1

et $\exists\, \varphi : I \to J$



t.q. $\boxed{\forall (x,y)\in I\times J \text{ on a : } F(x,y)=0 \Leftrightarrow y=\varphi(x)}$

de plus, φ de classe C^2. et $\varphi'(x) = -\dfrac{F_x(x,\varphi(x))}{F_y(x,\varphi(x))}$

On trouve. $F_x(x,y)=2e^{x+y}-1$

Donc $\forall x\in I$: $\varphi'(x) = -\dfrac{2e^{x+\varphi(x)}-1}{2e^{x+\varphi(x)}+1}$ $\quad$ $\varphi(1)=-1$

$\varphi'(1) = -\dfrac{2e^{1-1}-1}{2e^{1-1}+1} = -\dfrac{1}{3}$

$\varphi''(1) = \dots$

Calcul de $\varphi''(1)$:

$\forall x \in I$: $F(x,\varphi(x))=0$ on dérive en x :

$\forall x \in I$: $F_x(x,\varphi(x))\cdot 1 + F_y(x,\varphi(x))\,\varphi'(x) = 0$

$\forall x \in I$: $$F_{xx}(x,\varphi(x)) + F_{xy}(x,\varphi(x))\varphi'(x) + \left[F_{xy}(x,\varphi(x)) + F_{yy}(x,\varphi(x))\varphi'(x)\right]\varphi'(x)$$
$$+ F_y(x,\varphi(x))\,\varphi''(x) = 0$$

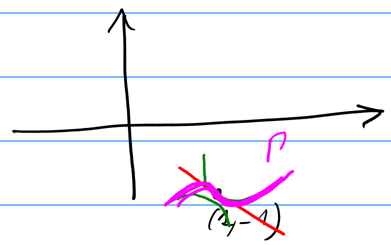
$F_{xx}(x,y) = 2e^{x+y}$
$F_{xy}(x,y) = 2e^{x+y}$
$F_{yy}(x,y) = 2e^{x+y}$

On trouve : $\forall x \in I$: $2e^{x+\varphi(x)}\left[1+3\varphi'(x)\right] + \left(2e^{x+\varphi(x)}+1\right)\varphi''(x) = 0$

$\varphi(1) = -1$
$\varphi'(1) = -1/3$

pour $x=1$ on trouve :
$$2e^{1-1}\underbrace{\cancel{\left(1+3\left(-\tfrac{1}{3}\right)\right)}}_{=0} + \left(2e^{1-1}+1\right)\varphi''(1) = 0$$

Donc $3\varphi''(1) = 0$ donc $\varphi''(1) = 0$



(57) $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0\}$

Étudier l'allure de Γ au voisinage de $(0,0)$ et $(1,1)$

$\boxed{(0,0) \in \Gamma \text{ immédiat}}$ $(1,1)$: $1+1-1+1-1 \neq 0$???

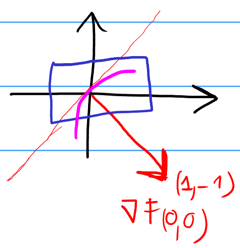
$(1,1) \notin \Gamma$ on l'oublie

$F(x,y) = x^4 + y^3 - y^2 + x - y$ F de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$\nabla F(x,y) = (4x^3+1,\ 3y^2-2y-1)$ $\nabla F(0,0) = (1,-1)$

$\Gamma \perp$ au vecteur $(1,-1)$ en $(0,0)$

donc la tangente à Γ en $(0,0)$ est la droite $y=x$



étude de la concavité de Γ en $(0,0)$

au voisinage de $(0,0)$: $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -1 \neq 0$

par le théo des fonctions implicites : $\exists$ $I \times J$ (rectangle centré en $(0,0)$)

t.q. $\exists$ $f : I \to J$ t.q. $\boxed{F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x) \quad \forall (x,y) \in I \times J}$

$\forall x \in I$ $\quad F(x, f(x)) = 0$

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x)) f'(x) = 0$$

$F_x(0,0) + F_y(0,0) f'(0) = 0 \Rightarrow f'(0) = -\frac{F_x(0,0)}{F_y(0,0)} = 1$

$$F_{xx}(x, f(x)) + F_{xy}(x, f(x)) f'(x) + F_{xy}(x, f(x)) f'(x) + F_{yy}(x, f(x)) (f'(x))^2 + F_y(x, f(x)) f''(x) = 0$$

$f(0) = 0$

$f'(0) = 1$

$f''(0) = -2$

$$\boxed{\begin{aligned} F_{xx}(0,0) &= 0 \\ F_{xy}(0,0) &= 0 \\ F_{yy}(0,0) &= -2 \end{aligned}}$$

$$-2 (f'(0))^2 - 1 \cdot f''(0) = 0$$

$$-2 - f''(0) = 0 \qquad f''(0) = -2 < 0$$

la concavité de Γ au voisinage de $(0,0)$ est vers le bas.