4 Intégrales multiples

4.1 Intégrale simple comme somme de Riemann et aire.

Rappel. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à une variable définie sur un intervalle $[a, b]$, on a défini l'**intégrale de f sur $[a, b]$** comme le nombre

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b,$$

où F est une **primitive de f sur** $[a, b]$, c'est-à-dire une fonction dérivable et telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. La primitive de f est notée $F(x) = \int f(x)\, dx$, mais ce n'est qu'une notation: comme fonction de x, on trouve $F(x)$ à l'aide du

Théorème fondamental du calcul intégral. $F(x) = \int_a^x F'(t)\, dt + c = \int_a^x f(t)\, dt + c,$ pour tout $x \in [a, b]$ et $c \in \mathbb{R}$.

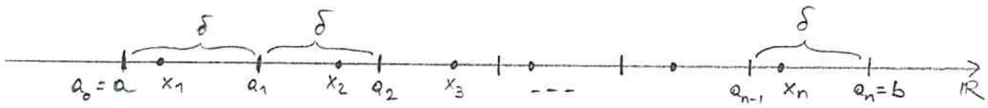
Si f admet une primitive F, par exemple quand f est continue, l'intégrale de f sur $[a, b]$ existe dès que l'intervalle $[a, b]$ est borné. (Si l'intervalle n'est pas borné, on parle d'*intégrale impropre*.) Pour calculer l'intégrale, ou la primitive, on transforme l'intégrand $f(x)$ jusqu'à obtenir, sous le signe d'intgrale, la dérivée d'une fonction, qui sera $F(x)$. Pour cela, on emploit les deux techniques suivantes:

Théorème du changement de variable. $\int_a^b f(x)\, dx = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} f\big(h(t)\big)\, h'(t)\, dt,$ où $x = h(t)$ et h est un difféomorphisme (bijection dérivable avec réciproque h^{-1} dérivable).

Théorème d'intégration par parties. $\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = \Big[f(x)\, g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx.$

Définir l'intégrale comme valeur d'une primitive ne permet pas d'en comprendre la signification géométrique (c'est une *aire*), ni d'en éteindre la définition aux fonctions de plusieures variables. Pour cela, il faut interpreter les intégrales comme *sommes de Riemann*.

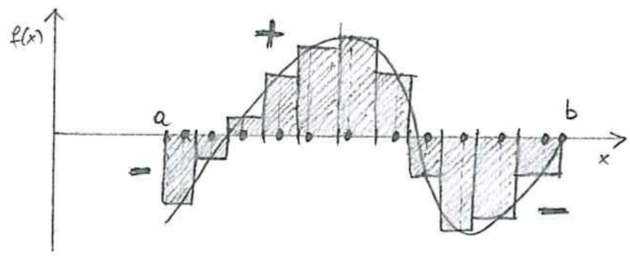
Définition. Une **subdivision** $\mathcal{S}_\delta$ de $[a, b]$ est une partition de l'intervalle $I = [a, b]$ en n intervalles $I_i = [a_{i-1}, a_i]$ (pour $i = 1, \dots, n$) de longueur $\delta = \dfrac{b-a}{n}$, en partant de $a_0 = a$ et en finissant en $a_n = b$.



Pour tout choix de n points $x_i \in I_i$ $(i = 1, \dots, n)$, on appelle **somme de Riemann de f** associée à la subdivision $\mathcal{S}_\delta$ et aux points $\{x_i\}$ la somme

$$R_\delta(f; \{x_i\}) := \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \delta$$

où chaque terme $f(x_i)\, \delta$ représente l'**aire algébrique** du rectangle de base I_i et hauteur $f(x_i)$.
Ici, "algébrique" signifie avec un signe $\pm$ qui dépend du signe de la fonction f au point choisi x_i.



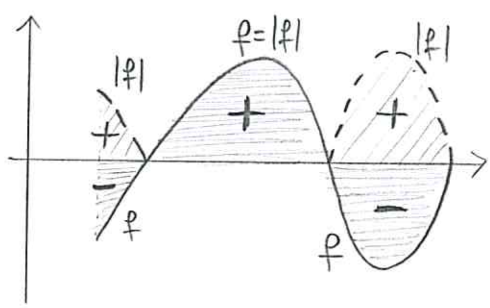
Théorème. Si la limite $\lim\limits_{\delta \to 0} R_\delta(f; \{x_i\})$ existe, elle est indépendante du choix des points $x_i \in I_i$, et on a

$$\lim_{\delta \to 0} R_\delta(f; \{x_i\}) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Corollaire. **[Signification géométrique de l'intégrale simple.]**

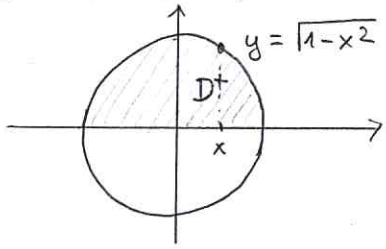
1. $\int_a^b f(x)\, dx =$ aire "algébrique" de la portion du plan comprise entre le graphe de f et l'axe $\vec{Ox}$

2. $\int_a^b |f(x)|\, dx =$ aire de la portion du plan comprise entre le graphe de f et l'axe $\vec{Ox}$



Exemple. **Aire du disque.** Par symétrie, on voit que l'aire du disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ est deux fois l'aire du demi-disque

$$D^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ y \geqslant 0\},$$



qui est la portion de plan comprise entre l'axe $\vec{Ox}$ et le graphe de la fonction $y = \sqrt{1-x^2}$. On a alors

$$\text{Aire}\,(D) = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\ dx.$$

On calcule cette intégrale par changement de variable, en posant $x = \sin t$ pour $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, car $\sqrt{1-x^2} = \cos t$. Puisque $dx = \cos t\ dt$, on a

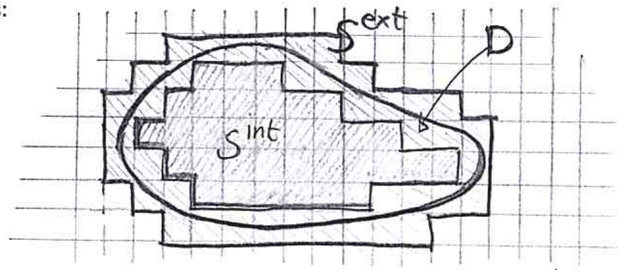
$$\text{Aire}\,(D) = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\ dt = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2t)+1}{2}\ dt = \Big[\frac{1}{2}\sin(2t) + t\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \big(0 + \frac{\pi}{2} - 0 + \frac{\pi}{2}\big) = \pi.$$

4.2 Intégrale double et volume. Théorème de Fubini. Changement de variables. Aire.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble borné $D \subset \mathbb{R}^2$.

Définition. Pour tout $\delta > 0$, on appelle **subdivision de** D l'ensemble $\mathcal{S}_\delta$ des carrés K_i de coté δ qui recouvrent D dans n'importe quel grillage de pas δ. On considère deux telles subdivisions:

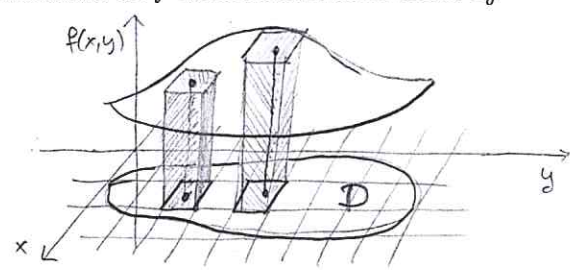
- $\mathcal{S}_\delta^{ext}$ indique le **recouvrement large** (à l'extérieur),
- $\mathcal{S}_\delta^{int}$ indique le **recouvrement strict** (à l'intérieur).



Puisque D est borné, les subdivisions contiennent un nombre fini de carrés, et on a $\mathcal{S}_\delta^{int} \subset \mathcal{S}_\delta^{ext}$. En fait, les carrés contenus dans l'ensemble $\mathcal{S}_\delta^{ext} \backslash \mathcal{S}_\delta^{int}$ couvrent exactement le bord ∂D de D.

Pour tout choix de points $(x_i, y_i) \in K_i \cap D$, on appelle **sommes de Riemann de** f associées aux subdivisions $\mathcal{S}_\delta^{ext/int}$ et aux points $\{(x_i, y_i)\}$ les sommes

$$R_\delta^{ext/int}(f, \{(x_i,y_i)\}) = \sum_{K_i \in \mathcal{S}_\delta^{ext/int}} f(x_i, y_i)\ \delta^2,$$



où chaque terme $f(x_i, y_i)\ \delta^2$ représente le **volume algébrique** du parallélogramme de base K_i et hauteur $f(x_i, y_i)$, avec signe $\pm$ qui dépend du signe de f en (x_i, y_i).

Définition. Si les limites $\lim\limits_{\delta \to 0} R_\delta^{ext/int}(f; \{(x_i, y_i)\})$ existent, elles sont indépendantes du choix des points $(x_i, y_i) \in K_i \cap D$ et elles coincident. Dans ce cas, on appelle **intégrale double de** f **sur** D cette limite:

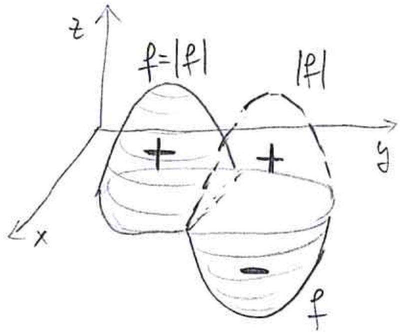
$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \lim_{\delta \to 0} R_\delta^{ext/int}(f; \{(x_i, y_i)\}).$$

On dit que f **est intégrable selon Riemann sur** D si l'intégrale $\displaystyle\iint_D f(x,y)\ dx\ dy$ est finie (un nombre réel, pas $\pm\infty$). En particulier, c'est le cas si f est continue et D est borné.

Corollaire. **[Signification géométrique de l'intégrale double.]**

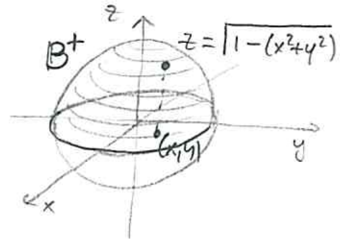
1. $\displaystyle\iint_D f(x,y)\ dx\ dy =$ volume "algébrique" de la portion d'espace comprise entre le graphe de f et le plan xOy

2. $\displaystyle\iint_D |f(x,y)|\ dx\ dy =$ volume de la portion d'espace comprise entre le graphe de f et le plan xOy



Exemple. Volume de la boule. Le volume de la boule $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$ est deux fois le volume de la demi-boule

$$B^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1,\ y \geqslant 0\},$$



comprise entre le plan xOy et le graphe de la fonction $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$. On a alors

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2 \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\ dx\ dy, \qquad \text{où} \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}.$$

Pour calculer les intégrales doubles, on utilise les proprietés suivantes, et deux techniques spécifiques.

Proposition.

1. $\displaystyle\iint_D (\lambda\ f(x,y) + \mu\ g(x,y))\ dx\ dy = \lambda \iint_D f(x,y)\ dx\ dy + \mu \iint_D g(x,y)\ dx\ dy,$ pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
2. Si $D = D_1 \cup D_2$ et $D_1 \cap D_2 =$ courbe ou $\varnothing$, alors $\displaystyle\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \iint_{D_1} f(x,y)\ dx\ dy + \iint_{D_2} f(x,y)\ dx\ dy;$
3. $\displaystyle\left|\iint_D f(x,y)\ dx\ dy\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\ dx\ dy;$
4. Si $f(x,y) \leqslant g(x,y)$ pour tout $(x,y) \in D$, alors $\displaystyle\iint_D f(x,y)\ dx\ dy \leqslant \iint_D g(x,y)\ dx\ dy.$

Calcul des intégrales doubles: théorème de Fubini.

Premier cas. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un rectangle $D = [a,b] \times [c,d]$.

Théorème. [Fubini, 1er cas.]

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right)\ dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx \right)\ dy}$$

Corollaire.

$$\boxed{\iint_{[a,b]\times[c,d]} f_1(x)\, f_2(y)\ dx\ dy = \int_a^b f_1(x)\ dx \int_c^d f_2(y)\ dy}$$

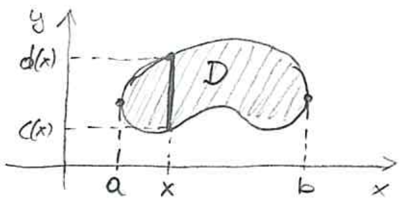
Notation: $\displaystyle\int_a^b dx \int_c^d dy\ f(x,y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right)\ dx.$

Exemples.

1. $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,\pi/2]} x\cos y\ dx\ dy = \int_0^1 x\ dx \int_0^{\pi/2} \cos y\ dy = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \left[\sin y\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$
2. $\displaystyle\iint_{[-1,1]\times[0,1]} (x^2y-1)\,dx\,dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^1 (x^2y-1)\ dy = \int_{-1}^1 dx \left[\frac{1}{2}x^2y^2 - y\right]_{y=0}^{y=1} = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)\ dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - x\right]_{-1}^1 = -\frac{5}{3}$

Deuxième cas. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un ensemble borné D quelconque. Alors:

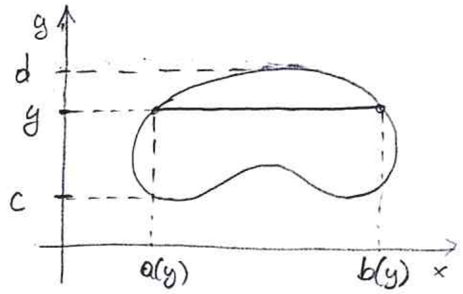
- pour tout $(x,y) \in D$, il existe surment des valeurs $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$,
- pour tout $x \in [a,b]$, il existe surment des valeurs $c(x), d(x) \in \mathbb{R}$ tels que $c(x) \leqslant y \leqslant d(x)$,



de telle sorte que $\boxed{D = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ y \in [c(x), d(x)]\,\}}$.

À noter que les deux courbes $\partial D^- = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ y = c(x)\,\}$ et $\partial D^+ = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ y = d(x)\,\}$ decrivent le bord de D.

En alternative:



- pour tout $(x, y) \in D$, il existe surment des valeurs $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $c \leqslant y \leqslant d$,
- pour tout $y \in [c, d]$, il existe surment des valeurs $a(y), b(y) \in \mathbb{R}$ tels que $a(y) \leqslant x \leqslant b(y)$,

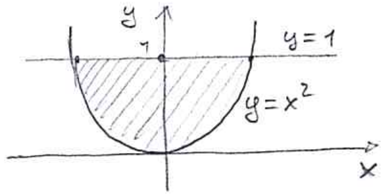
de telle sorte que $\boxed{D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d],\ x \in [a(y), b(y)] \}}$.

Dans ce cas, ce sont les deux courbes $\partial D^- = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d],\ x = a(y) \}$ et $\partial D^+ = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d],\ x = b(y) \}$ qu decrivent le bord de D.

Selon le choix qu'on adopte pour décrire D, on a alors:

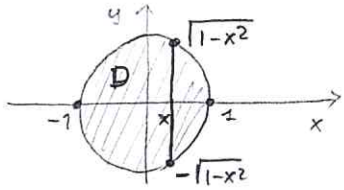
Théorème. [Fubini, 2ème cas.] $\boxed{\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx \right) dy.}$

Exemples.



1. Soit D la partie du plan xOy délimitée par l'arc de parabole $y = x^2$ en bas, et la droite $y = 1$ en haut. On peut alors décrire D comme l'ensemble
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1],\ y \in [x^2, 1]\}.$$
Par conséquent, on a:
$$\iint_D x^2 y\, dx\, dy = \int_{-1}^1 x^2\, dx \int_{x^2}^1 y\, dy = \int_{-1}^1 x^2 \left[\frac{1}{2} y^2\right]_{x^2}^1 dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(x^2 - x^4)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{15}.$$

2. **Volume de la boule en coordonnées cartesiennes.** Pour $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$, on sait que
$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2 \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy, \qquad \text{où } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$



On peut décrire D comme l'ensemble
$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1],\ y \in \left[-\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - x^2} \right] \right\},$$
donc on a
$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2 \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dy = 2 \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - \frac{y^2}{1 - x^2}}\, dy.$$
Avec le changement de variable $\dfrac{y}{\sqrt{1 - x^2}} = \sin t$, on a
$$-\sqrt{1 - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1 - x^2} \implies -1 \leqslant \sin t \leqslant 1 \implies -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},$$
$$\frac{y^2}{1 - x^2} = \sin^2 t \implies \sqrt{1 - \frac{y^2}{1 - x^2}} = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \quad \text{pour } t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}],$$
$$y = \sqrt{1 - x^2}\, \sin t \implies dy = \sqrt{1 - x^2}\, \cos t\, dt.$$
En sachant que $2 \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \pi$ (voir exemple précédent), on a alors:
$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2 \int_{-1}^1 (1 - x^2)\, dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2)\, dx = \pi \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

Calcul des intégrales doubles: changement de variables.

Considerons l'intégrale $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ et un changement de variables $(x,y) = h(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$. Pour exprimer l'intégrale en termes de la fonction $\tilde{f}(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$, il faut exprimer D et le "produit" $dx\,dy$ en termes de (u,v):

- Le domaine D se transforme en le domaine $\tilde{D} = h^{-1}(D) = \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) = h(u,v) \in D\big\}$.
- Les éléments dx et dy se transforment comme $\begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial x}{\partial v}\,dv \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial y}{\partial v}\,dv \end{cases}$ i.e. comme $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = J_h(u,v)\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$

 où $J_h(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ est la matrice Jacobienne du changement de coordonnées.

- Pour le "produit" $dx\,dy$ il faut faire attention: il s'agit d'un *produit wedge* entre *formes différentielles* (hors programme Math2), normalement noté $dx \wedge dy$. Sans rentrer dans les détails, il suffit de dire qu'il est linéaire dans les coefficients de dx et dy (qui sont des fonctions) et antisymétrique:

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx \qquad \text{et donc aussi} \quad dx \wedge dx = 0, \quad dy \wedge dy = 0.$$

 Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= \Big(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\Big) \wedge \Big(\frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv\Big) \\ &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}\,du \wedge du + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\,du \wedge dv + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\,dv \wedge du + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}\,dv \wedge dv \\ &= \Big(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\Big)\,du \wedge dv = \det J_h(u,v)\,du \wedge dv. \end{aligned}$$

 Quand on identifie $dx\,dy$ à $dx \wedge dy$ en réalité on ne fait pas attention à l'ordre, on suppose que $dx\,dy = dy\,dx$. Pour éviter le changement de signe "$-$" qui viendrait de l'égalité $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$, il suffit d'adopter la formule suivante, avec la valeur absolue du déterminant Jacobien:

$$dx\,dy = \Big|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\Big|\,du\,dv = \Big|\det J_h(u,v)\Big|\,du\,dv.$$

 En particulier, pour le changement en **coordonnées polaires**, on a: $\boxed{dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi}$.

On arrive finalement au théorème suivant:

Théorème. [Changement de variables.]

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{h^{-1}(D)} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\,\Big|\det J_h(u,v)\Big|\,du\,dv}$$

Exemple. Volume de la boule en coordonnées polaires. Pour $B = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\big\}$, calculons

$$\mathrm{Vol}(B) = 2\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dx\,dy, \qquad \text{où} \quad D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\big\}$$

avec le changement de variables en coordonnées polaires, $(x,y) = h(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$. Puisque $x^2 + y^2 = \rho^2$, on a:

$$\begin{aligned} &\sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - \rho^2} \\ &h^{-1}(B) = \big\{(\rho,\varphi) \in [0,\infty[\times [0,2\pi[\;\big|\; \rho \leqslant 1\big\} = [0,1] \times [0,2\pi[\end{aligned}$$

et donc, en sachant que $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi$ et en utilisant Fubini pour separer les variables, on a

$$\mathrm{Vol}(B) = 2\iint_{[0,1]\times[0,2\pi[} \sqrt{1 - \rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi = 2\int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2}\,\rho\,d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

L'intégrale en φ est simple: $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi = [\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi$. Pour l'autre, si on pose $t = 1-\rho^2$ on a

$$\begin{aligned} &\rho = 0 \implies t = 1 \qquad \text{et} \qquad \rho = 1 \implies t = 0, \\ &\sqrt{1-\rho^2} = \sqrt{t} = t^{1/2}, \\ &dt = -2\rho\, d\rho \implies \rho\, d\rho = -\frac{1}{2}\, dt, \end{aligned}$$

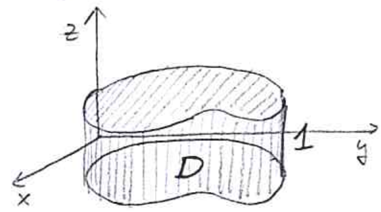
et on obtient enfin

$$\mathrm{Vol}\,(B) = -\frac{2}{2}\, 2\pi \int_1^0 t^{1/2}\, dt = 2\pi \int_0^1 t^{1/2}\, dt = 2\pi \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\, t^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = 2\pi\, \frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

Applications des intégrales doubles.

Corollaire. [Aire.] Pour tout domaine borné D de $\mathbb{R}^2$, on a: $$\boxed{\mathrm{Aire}\,(D) = \left| \iint_D dx\, dy \right|}$$

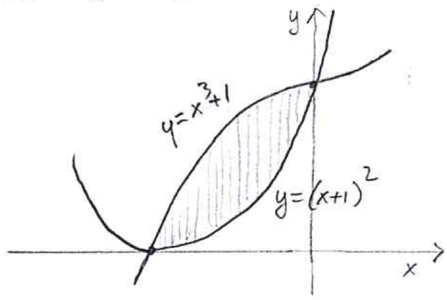
En effet, $\displaystyle\iint_D dx\, dy$ est le volume (algébrique) de la portion d'espace comprise entre le graphe de la fonction constante $f(x,y) = 1$ et le plan xOy: ce solide est un cylindre de hauteur 1 et de base D, son volume est donc égal à l'aire de D multipliée par la hauteur, qui vaut 1. La valeur absolue force le résultat à être positif, en dépit d'une éventuelle valeure négative due au sens d'intégration des variables.



Exercices.

1. Calculer l'aire du domaine D de $\mathbb{R}^2$ délimité par les courbes d'équation $y = x^2 + 2x + 1$ et $y = x^3 + 1$.

   D'abord on dessine le domaine D: la courbe $y = x^3 + 1$ n'est rien d'autre que $y = x^3$ translaté vers le haut de 1, et la courbe $y = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ est une parabole orientée vers le haut et centrée au point $x + 1 = 0$ et $y = 0$, c'est-à-dire au point $(-1, 0)$. Les deux courbes se rencontrent aux points $(-1, 0)$ et $(0, 1)$. On a donc



   $$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 0,\ x^2 + 2x + 1 \leqslant y \leqslant x^3 + 1\Big\}.$$

   Donc

   $$\begin{aligned} \iint_D dx\, dy &= \int_{-1}^0 dx \int_{x^2+2x+1}^{x^3+1} dy = \int_{-1}^0 [\, y \,]_{x^2+2x+1}^{x^3+1}\, dx = \int_{-1}^0 \left(x^3 + 1 - x^2 - 2x - 1\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^0 = \frac{1}{4}(-1)^4 - \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 = -\frac{5}{12} \end{aligned}$$

   et par conséquent

   $$\mathrm{Aire}\,(D) = \left| \iint_D dx\, dy \right| = \left| -\frac{5}{12} \right| = \frac{5}{12}.$$

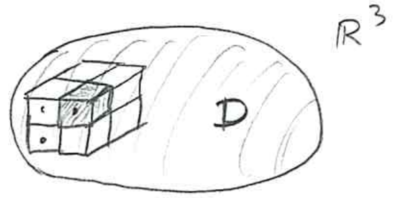
2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_D (x^2 - 2y)\, dx\, dy$, où D est le domaine de l'exercice précédent.

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 - 2y)\, dx\, dy &= \int_{-1}^0 dx \int_{x^2+2x+1}^{x^3+1} (x^2 - 2y)\, dy = \int_{-1}^0 \left[\, x^2 y - y^2 \,\right]_{x^2+2x+1}^{x^3+1}\, dx \\ &= \int_{-1}^0 \Big(x^2(x^3+1) - (x^3+1)^2 - x^2(x^2+2x+1) + (x^2+2x+1)^2\Big)\, dx \\ &= \int_{-1}^0 \left(-x^6 + x^5 + 6x^2 + 4x\right) dx = \left[-\frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{6}x^6 + 2x^3 + 2x^2\,\right]_{-1}^0 = \frac{1}{7} + \frac{1}{6} - 2 + 2 = \frac{13}{42} \end{aligned}$$

4.3 Intégrale triple. Théorème de Fubini. Changement de variables. Volume. Moments et centres d'inértie.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de trois variables (x, y, z), et soit $D \subset D_f \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble borné.

Définition. On définie l'**intégrale triple de** f **sur** D comme la limite de la **somme de Riemann** associée à une **subdivision** $\mathcal{S}_\delta$ de D en petits cubes K_i de taille δ^3, avec δ qui tend vers zéro:



$$\iiint_D f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \lim_{\delta \to 0} \sum_{K_i \in \mathcal{S}_\delta} f(x_i, y_i, z_i)\, \delta^3,$$

quelconque soit le choix des points $(x_i, y_i, z_i) \in K_i$.

Cette définition est l'analogue en dimension 3 de celle donnée en dimension 2 pour les intégrales doubles. Les intégrales triples ont donc exactement les mêmes proprietés des intégrales doubles, et les mêmes théorèmes d'existance (f continue sur D borné).

La signification géométrique de l'intégrale triple est plus abstraite: par analogie, le *volume (algébrique) de la portion d'espace comprise entre le graphe de* f *et le plan* xOy devient le **quadri-volume** *(algébrique) de la portion de* **quadri-espace** *comprise entre le graphe de* f *et l'espace* $Oxyz$.

Calcul des intégrales triples.

Théorème. [Fubini.]

1. Si $D = [a,b] \times [c,d] \times [e,g]$ est un parallélepipède, alors:

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^g dz\ f(x,y,z)} \qquad \text{(dans l'ordre qu'on veut).}$$

2. Si $D = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a,b],\ y \in [c(x), d(x)],\ z \in [e(x,y), g(x,y)] \Big\}$ est un ensemble borné quelconque, alors:

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy \int_{e(x,y)}^{g(x,y)} dz\ f(x,y,z)} \qquad \text{(ordre forcé).}$$

Exemples.

1.

$$\iiint_{[0,1]\times[1,2]\times[2,3]} (x^2 - 2yz)\ dx\ dy\ dz = \int_2^3 dz \int_1^2 dy \int_0^1 dx\ (x^2 - 2yz) = \int_2^3 dz \int_1^2 dy\ \Big[\frac{1}{3}x^3 - 2xyz \Big]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \int_2^3 dz \int_1^2 dy\ \Big(\frac{1}{3} - 2yz \Big) = \int_2^3 \Big[\frac{1}{3}y - y^2 z \Big]_{y=1}^{y=2} dz = \int_2^3 \Big(\frac{2}{3} - 4z - \frac{1}{3} + z \Big)\ dz$$

$$= \int_2^3 \Big(\frac{1}{3} - 3z \Big)\ dz = \Big[\frac{1}{3}z - \frac{3}{2}z^2 \Big]_2^3 = \frac{3}{3} - \frac{27}{2} - \frac{2}{3} + \frac{12}{2} = \frac{1}{3} - \frac{15}{2} = -\frac{43}{6}$$

2. Si Ω est le cylindre plein, de base le disque $D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z = 0\Big\}$ et de hauteur 3, on peut écrire

$$\Omega = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 3 \Big\}$$
$$= \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [-1,1],\ y \in \big[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2} \big],\ z \in [0,3] \Big\}$$

et donc

$$\iiint_\Omega (1 - 2yz)\ dx\ dy\ dz = \int_0^3 dz \iint_D (1 - 2yz)\ dx\ dy = \int_0^3 dz \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - 2yz)\ dy$$

$$= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 \Big[y - y^2 z \Big]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^3 dz \int_{-1}^1 \Big(\sqrt{1-x^2} - (1-x^2)z + \sqrt{1-x^2} + (1-x^2)z \Big)\ dx$$

$$= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2}\ dx = 3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2 t\ dt = 3\pi$$

Théorème. [Changement de variables.] Si $(x, y, z) = h(u, v, w)$ est un changement de variables, alors:

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\; dx\; dy\; dz = \iiint_{h^{-1}(D)} f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)\; \Big|\det J_h(u,v,w)\Big|\; du\; dv\; dw}$$

En particulier, pour les changements on **coordonnées cylindriques** et **sphériques**, on a:

$$\boxed{dx\; dy\; dz \quad = \quad \rho\; d\rho\; d\varphi\; dz \quad = \quad r^2 \sin\theta\; dr\; d\varphi\; d\theta}$$

Exemple. Considerons à nouveau l'intégrale de la fonction $f(x, y, z) = 1 - 2yz$ sur le cylindre plein Ω, de base le disque $D = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z = 0\big\}$ et de hauteur 3. En coordonnées cylindriques, on a

$$\begin{aligned}\Omega &= \big\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 3 \,\big\} \\ &= \big\{\, (\rho,\varphi,z) \mid \rho \in [0,1],\ \varphi \in [0,2\pi[,\ z \in [0,3] \,\big\}\end{aligned}$$

et donc, puisque $dx\; dy\; dz = \rho\, d\rho\; d\varphi\; dz$, on a

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega (1-2yz)\; dx\; dy\; dz &= \int_0^3 dz \iint_D (1-2yz)\; dx\; dy = \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} (1 - 2\rho\sin\varphi z)\; d\varphi \\ &= \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\, d\rho\, \Big[\varphi + 2\rho\cos\varphi z\Big]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \int_0^3 dz \int_0^1 \Big(2\pi + 2\rho z - 2\rho z\Big)\; \rho\, d\rho \\ &= \int_0^3 dz \int_0^1 2\pi\; \rho\, d\rho = 3\ \pi\, \Big[\rho^2\Big]_0^1 = 3\pi\end{aligned}$$

Applications des intégrales triples.

Corollaire. [Volume.] Pour tout domaine borné D de $\mathbb{R}^3$, on a: $\boxed{\mathrm{Vol}\,(D) = \left| \iiint_D dx\; dy\; dz \right|}$

Exemple. Volume de la boule en coordonnées sphériques. En coordonnées sphériques, la boule $B = \big\{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1 \,\big\}$ devient

$$h^{-1}(B) = \big\{\, (r,\varphi,\theta) \mid r \in [0,1],\ \varphi \in [0,2\pi[,\ \theta \in [0,\pi] \,\big\},$$

et, puisque $dx\; dy\; dz = r^2 \sin\theta\; dr\; d\varphi\; d\theta$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\,(B) &= \iiint_B dx\; dy\; dz = \iiint_{[0,1]\times[0,2\pi[\times[0,\pi]} r^2\sin\theta\; dr\; d\varphi\; d\theta = \int_0^1 r^2\; dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta\; d\theta \\ &= \frac{1}{3}\; 2\pi\, \Big[-\cos\theta\Big]_0^\pi = \frac{2\pi}{3}\; (1+1) = \frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$

Corollaire. [Quantités totale et moyenne.] Si $f \geqslant 0$ denote la *concentration* d'une matière (*densité volumique*), ou la *densité* d'un courant ou d'une énergie, alors:

- **Quantité totale** de matière / courant présente en $D = \left| \iiint_D f(x,y,z) dx\; dy\; dz \right|$
- **Quantité moyenne** de matière / courant présente en $D = \dfrac{1}{\mathrm{Vol}\,(D)} \left| \iiint_D f(x,y,z) dx\; dy\; dz \right|$

Exemple. Un matériau est distribué dans le cube $D = [0, R]^3$ selon la densité volumique $f(x, y, z) = \dfrac{x + y}{(z+1)^2}$. La quantité totale du matériau est alors

$$\iiint_D f(x,y,z)\; dx\; dy\; dz = \int_0^R dx \int_0^R (x+y)dy \int_0^R \frac{1}{(z+1)^2}\; dz = \int_0^R \Big[\, xy + \frac{1}{2}y^2 \Big]_0^R dx \Big[-\frac{1}{z+1} \Big]_0^R$$
$$= \int_0^R \Big(Rx + \frac{1}{2}R^2 \Big) dx \Big(1 - \frac{1}{R+1} \Big) = \Big[\frac{1}{2}Rx^2 + R^2 x \Big]_0^R \frac{R}{R+1}$$
$$= \Big(\frac{1}{2}R^3 + R^3 \Big) \frac{R}{R+1} = \frac{3R^4}{2(R+1)},$$

et, puisque $\mathrm{Vol}\,(D) = R^3$, la quantité moyenne du matériau dans le cube est

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}\,(D)} \iiint_D f(x,y,z)\; dx\; dy\; dz = \frac{1}{R^3} \frac{3R^4}{2(R+1)} = \frac{3R}{2(R+1)}.$$

Corollaire. **[Centre de masse.]** Si $\mu \geqslant 0$ denote la *densité de masse*, et $r(x,y,z)$ denote la distance d'un point (x,y,z) depuis un point fixe P ou une droite fixe Δ, alors:

- **Masse totale** présente en D: $M = \left| \iiint_D \mu(x,y,z)\; dx\; dy\; dz \right|$
- **Centre de masse** (ou **centre d'inértie**, ou encore **baricentre**) = point G de coordonnées (x_G, y_G, z_G) telles que
$$x_G = \frac{1}{M} \iiint_D x\; dx\; dy\; dz, \qquad y_G = \frac{1}{M} \iiint_D y\; dx\; dy\; dz, \qquad z_G = \frac{1}{M} \iiint_D z\; dx\; dy\; dz$$
- **Moment d'inértie** par rapport à P ou à $\Delta = \dfrac{1}{M} \left| \iiint_D r^2(x,y,z)\; \mu(x,y,z)\; dx\; dy\; dz \right|$

Un matériau est **homogène** si sa densité de masse est constante. Si cette constante n'est pas spécifiée, on peut supposer que $\mu(x,y,z) = 1$ pour tout (x,y,z).

Exemple. Trouvons le centre de masse du demi-cylindre homogène

$$D = \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2,\; z \in [0,H], y \geqslant 0 \big\}.$$

Il convient de travailler en coordonnées cylindriques:

$$h^{-1}(D) = \big\{ (\rho, \varphi, z) \mid \rho \in [0,R],\; \varphi \in [0,\pi],\; z \in [0,H] \big\}.$$

La masse totale est alors

$$M = \iiint_D dx\; dy\; dz = \iiint_{h^{-1}(D)} \rho\; d\rho\; d\varphi\; dz = \int_0^R \rho\; d\rho \int_0^\pi d\varphi \int_0^H dz = \frac{\pi R^2 H}{2}.$$

Puisque $\displaystyle\int_0^\pi \cos\varphi\; d\varphi = \Big[\, \sin\varphi \Big]_0^\pi = 0$, et $\displaystyle\int_0^\pi \sin\varphi\; d\varphi = \Big[-\cos\varphi \Big]_0^\pi = 2$, le centre de masse G a coordonnées cartesiennes

$$x_G = \frac{1}{M} \iiint_D x\; dx\; dy\; dz = \frac{1}{M} \iiint_{h^{-1}(D)} \rho\cos\varphi\; \rho\; d\rho\; d\varphi\; dz = \frac{1}{M} \int_0^R \rho^2\; d\rho \int_0^\pi \cos\varphi\; d\varphi \int_0^H dz = 0$$
$$y_G = \frac{1}{M} \iiint_D y\; dx\; dy\; dz = \frac{1}{M} \int_0^R \rho^2\; d\rho \int_0^\pi \sin\varphi\; d\varphi \int_0^H dz = \frac{2}{\pi R^2 H} \frac{R^3}{3}\, 2\, H = \frac{4R}{3\pi}$$
$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_D z\; dx\; dy\; dz = \frac{1}{M} \int_0^R \rho\; d\rho \int_0^\pi d\varphi \int_0^H z\; dz = \frac{2}{\pi R^2 H} \frac{R^2}{2}\, \pi\, \frac{H^2}{2} = \frac{H}{2}$$

donc $G = \Big(0, \dfrac{4R}{3\pi}, \dfrac{H}{2} \Big)$.

Exercices.

1. Un sac de farine tombe par terre et la farine s'éparpille au sol avec une concentration non homogène

$$f(x,y) = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)^2}, \qquad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Calculer la quantité totale et celle moyenne de farine éparpillée dans le disque de rayon $R > 0$ autour du sac.

La fonction f se simplifie en coordonnées polaires, car on a $\tilde{f}(\rho,\varphi) = \frac{1}{(\rho+1)^2}$, et le disque en coordonnées polaires est $D_R = \{ (\rho,\varphi) \mid \rho \in [0,R],\ \varphi \in [0,2\pi[\}$. On a alors:

$$\begin{aligned}
\text{Quantité totale} &= \iint_{D_R} \frac{1}{(\rho+1)^2}\, \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^R \left(\frac{\rho+1}{(\rho+1)^2} - \frac{1}{(\rho+1)^2}\right) d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^R \left(\frac{1}{\rho+1} - \frac{1}{(\rho+1)^2}\right) d\rho \\
&= 2\pi\Big[\ln(\rho+1) + \frac{1}{\rho+1} \Big]_0^R = 2\pi\ \Big(\ln(R+1) + \frac{1}{R+1} - \ln 0 - 1 \Big) = 2\pi\ \Big(\ln(R+1) - \frac{R}{R+1} \Big) \\
\text{Aire}\,(D_R) &= \iint_{D_R} \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^2}{2}\, 2\pi = \pi R^2 \\
\text{Quantité moyenne} &= \frac{1}{\text{Aire}\,(D_R)} \iint_{D_R} \frac{1}{(\rho+1)^2}\, \rho\, d\rho\, d\varphi = \frac{2}{R^2}\ \Big(\ln(R+1) - \frac{R}{R+1} \Big)
\end{aligned}$$

2. Calculer le centre de masse du solide Ω composé de la demi-boule B_R^- et du cylindre C_R suivants:

$$\begin{aligned}
B_R^- &= \Big\{ (r,\varphi,\theta) \mid r \in [0,R],\ \varphi \in [0,2\pi],\ \theta \in [\pi/2,\pi] \Big\} \\
C_R &= \Big\{ (\rho,\varphi,z) \mid \rho \in [0,R],\ \varphi \in [0,2\pi],\ z \in [0,R] \Big\},
\end{aligned}$$

ayant densité de masse $\mu(x,y,z) = z^2$.

La masse totale de Ω est $M_\Omega = M_{B_R^-} + M_{C_R}$, avec $\mu(x,y,z) = r^2\cos^2\theta$ sur B_R^-. On a donc

$$\begin{aligned}
M_{B_R^-} &= \iiint_{B_R^-} r^2\cos^2\theta\ r^2\sin\theta\ dr\, d\varphi\, d\theta = \int_0^R r^4\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta\sin\theta\, d\theta = \frac{R^5}{5}\, 2\pi\, \Big[-\frac{1}{3}\cos^3\theta \Big]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{2\pi R^5}{15} \\
M_{C_R} &= \iiint_{C_R} z^2\ \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R z^2\, dz = \frac{R^2}{2}\, 2\pi\, \frac{R^3}{3} = \frac{\pi R^5}{3} \\
M_\Omega &= M_{B_R^-} + M_{C_R} = \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{3}\right) \pi R^5 = \frac{7\pi R^5}{15}.
\end{aligned}$$

Puisque $\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = 0$ et $\int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 0$, les coordonnées cartesiennes du baricentre G de Ω sont:

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega x\mu(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \\
&= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5\, dr \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta\sin^2\theta\, d\theta + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho^2\, d\rho \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^R z^2\, dz = 0 \\
y_G &= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5\, dr \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta\sin^2\theta\, d\theta + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho^2\, d\rho \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^R z^2\, dz = 0 \\
z_G &= \frac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega z^3\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3\theta\sin\theta\, d\theta + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R z^3\, dz \\
&= \frac{15}{7\pi R^3} \left(\frac{R^6}{6}\, 2\pi\, \Big[-\frac{1}{4}\cos^4\theta \Big]_{\pi/2}^{\pi} + \frac{R^2}{2}\, 2\pi\, \frac{R^4}{4} \right) = \frac{15\pi R^6}{7\pi R^3} \left(-\frac{1}{3}\,\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{15R^3}{7}\ \frac{-1+3}{12} = \frac{5R^3}{14}.
\end{aligned}$$

En conclusion, le baricentre a coordonnées $G = (0,0,5R^3/14)$ et se trouve dans la partie cylindrique, car $5R^3/14 > 0$.
À noter que le baricentre se trouve <u>à l'intérieur de Ω</u> seulement si $5R^3/14 \leqslant R$, ce qui se vérifie si $R \leqslant \sqrt{14/5}$.