Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
4 mai 2018

Analyse pour l'économie 2. Contrôle continu de rattrapage.

Exercice 1.

1. Démontrer qu'au voisinage du point $(1, 0)$, l'équation
$$x^2 - e^{xy} + y^2 = 0 \tag{*}$$
définit implicitement une fonction de classe C^2, $x \mapsto y(x)$.
2. Donner les valeurs de $y(1)$, $y'(1)$. En déduire l'équation de la droite tangente, au point $(1, 0)$, à la courbe Γ définie par l'équation (*).
3. Calculer $y''(1)$: quelle est la position de Γ par rapport à cette droite, au voisinage de $(1, 0)$?

Solution.

1. Posons $F(x, y) = x^2 - e^{xy} + y^2 = 0$. Observons que $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2, vérifiant $F(1, 0) = 0$. De plus, $F_y(x, y) = -xe^{xy} + 2y$ et $F_y(1, 0) = -1 \neq 0$. Par le théorème des fonctions implicites, au voisiange de $(1, 0)$ l'équation $F(x, y) = 0$ définit implicitement une fonction de classe C^2, $y = y(x)$, telle que $y(1) = 0$. On a, pour tout x dans un voisinage de $x = 1$, $F(x, y(x)) = 0$, c'est-à-dire
$$x^2 - e^{x\,y(x)} + y(x)^2 = 0.$$
2. En dérivant ceci par rapport à x on trouve, au voisinage de $x = 1$,
$$2x - e^{xy(x)}[y(x) + xy'(x)] + 2y(x)y'(x) = 0.$$
Mais $y(1) = 0$, donc, en remplaçant $x = 1$, on trouve
$$y'(1) = 2.$$
La droite tangente tangente cherchée est alors la droite $y = mx + q$ de pente $m = 2$ et passant par $(1, 0)$. Il s'agit alors de la droite d'équation $y = 2(x - 1)$ ()
3. En dérivant une seconde fois l'identité précédente par rapport à x on trouve, toujours au voisinage de $x = 1$,
$$2 - e^{xy(x)}[(y(x) + xy'(x))^2 + 2y'(x) + xy''(x)] + 2y'(x)^2 + 2y(x)y''(x) = 0.$$
Ensuite, en remplaçant $x = 1$, $y(1) = 0$ et $y'(1) = 2$ dans cette équation on trouve $y''(1) = 2$. Comme $y''(1) > 0$, la fonction est convexe au voisinage de $x = 1$, la courbe Γ reste donc au dessus de la droite tangente dans ce voisinage.

Exercice 2. Soit $m > 0$. Calculer l'aire de la portion du plan limitée par la parabole $y = x^2$ et la droite $y = mx$.

Solution. Les intersections entre la parabole et la droite sont les points $(0, 0)$ et (m, m^2). Il s'agit alors de calculer $\iint_D 1\,dx\,dy$, où
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le m,\ x^2 \le y \le mx\}.$$
On a
$$\begin{aligned}\iint_D 1\,dx\,dy &= \int_0^m \left[\int_{x^2}^{mx} 1\,dy\right] dx\\ &= \int_0^m (mx - x^2)\,dx = \frac{1}{2}m^3 - \frac{1}{3}m^3\\ &= \frac{1}{6}m^3.\end{aligned}$$

Exercice 3.

1. Démontrer que l'application $\theta \mapsto (\sin(2\theta), 2\sin^2\theta, 2\cos\theta)$, où $\theta \in [0,\pi]$, définit une courbe qui est contenue sur une sphère de centre O, dont on précisera le rayon.
2. Préciser une constante $a > 0$ telle que la longueur L de cette courbe vérifie $a < L < \frac{3}{2}a$.
3. Écrire l'équation de la droite tangente à la courbe au point $(1, 1, \sqrt{2})$.

Solution.

1. Calculons la distance à l'origine d'un point générique de la courbe. On a, pour tout $\theta \in [0,\pi]$,

   $$\left\|(\sin(2\theta), 2\sin^2\theta, 2\cos\theta)\right\|^2 = \sin^2(2\theta) + 4\sin^4\theta + 4\cos^2\theta = 4\sin^2\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 4\cos^2\theta = 4.$$

   La courbe est donc contenue dans la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, qui est la sphère de centre O et de rayon 2.
2. Posons $\varphi(\theta) = (\sin(2\theta), 2\sin^2\theta, 2\cos\theta)$. Calculons d'abord la dérivée de φ. On trouve

   $$\varphi'(\theta) = (2\cos(2\theta), 4\sin\theta\cos\theta, -2\sin\theta).$$

   La formule de la longueur d'une courbe paramétrée donne

   $$\begin{aligned} L &= \int_0^\pi \left\|\varphi'(\theta)\right\| d\theta = \int_0^\pi \sqrt{4\cos^2(2\theta) + 4\sin^2(2\theta) + 4\sin^2\theta}\, d\theta \\ &= \int_0^\pi 2\sqrt{1+\sin^2\theta}\, d\theta. \end{aligned}$$

   Mais $0 \le \sin^2\theta \le 1$. Donc $2\pi < L < \sqrt{2}\,2\pi < \frac{3}{2}\,2\pi$. On voit alors que $a = 2\pi$ convient.
3. Imposons $\varphi(\theta) = (\sin(2\theta), 2\sin^2\theta, 2\cos\theta) = (1, 1, \sqrt{2})$, avec $0 \le \theta \le \pi$. Cela donne la valeur $\theta = \frac{\pi}{4}$. On a $\varphi'(\frac{\pi}{4}) = (0, 2, -\sqrt{2})$. La droite tangente cherchée est donc la droite paramétrée par

   $$\theta \mapsto (1, 1, \sqrt{2}) + \theta(0, 2, -\sqrt{2}), \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$