exercice 1

$$y' + y = \max(x, 0).$$

La solution générale est : $y(x) = a e^{-x} + C(x) e^{-x}$, $a \in \mathbb{R}$,

où $C(x) = \int \max(x,0) e^x \, dx = \int \max(0, x e^x) \, dx$. (Méthode de variation des constantes)

Mais $\int x e^x \, dx = x e^x - e^x$ et cette fonction vaut -1 en $x=0$.

Nous pouvons définir alors : $C(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ x e^x - e^x, & x \geq 0 \end{cases}$

Cela donne :

$$y(x) = a e^{-x} + \begin{cases} -e^{-x}, & x \leq 0 \\ x - 1, & x \geq 0 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}$$

exercice 2

$$y''' + y'' + y' = 2x. \quad (E)$$

Posons $P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda^2 + \lambda + 1)$. Les racines sont $\lambda = 0$ et $\lambda = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

La solution générale de l'éq. homogène $y''' + y'' + y' = 0$ est $a + e^{-\frac{1}{2}x}\left(b \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de (E) de type polynôme.

On peut essayer d'abord avec $y(x) = Ax + B$, mais cela ne marche pas.

Par contre si on essaye avec $y(x) = Ax^2 + Bx + C$ on trouve $y''' = 0$,

$y'' = 2A$; $y' = 2Ax + B$, donc $A = 1$, $B = -2$ et C arbitraire.

La solution générale de (E) est alors :

$$a + e^{-\frac{1}{2}x}\left(b \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + x^2 - 2x, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\text{exercice 3}}$

$E = C([0,\pi], \mathbb{R})$

$T : E \to E$, $T(f) = F$, où $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt + 1$

(on a bien $F' = f$ et $F(0) = 1$).

$\|T(f) - T(g)\|_\infty = \sup_{x \in [0,\pi]} \left| \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x g(t)\,dt \right| \leq$

$\leq \sup_{x \in [0,\pi]} \int_0^x |f(t) - g(t)|\,dt \leq \int_0^\pi |f(t) - g(t)|\,dt$

$\leq \int_0^\pi \|f-g\|_\infty\,dt = \pi \|f-g\|_\infty$

Donc T est une application π-lipschitzienne.

Le théorème des contraction ne s'applique pas.

Observons que $f \in E$ est un point fixe pour T si et seulement si

$Tf = f$, ssi $\forall x \in [0,\pi]$: $f(x) = \int_0^x f(t)\,dt + 1$

Mais alors f est dérivable et $f'(x) = f(x)$. Donc $f(x) = Ce^x$, $C \in \mathbb{R}$

Plus précisément, $C = 1$, car $1 = (Tf)(0) = f(0) = C$, donc $f(x) = e^x$.

Conclusion $f(x) = e^x$ est le seul point fixe pour T dans E.